



ALMENAVDELINGEN
UNIVERSITETET I TRONDHEIM - NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
7034 TRONDHEIM - NTH

HOVEDOPPGAVE

for

stud.techn. Even Thorbergsen,
Avd. VIIB, NTH.

Innleveringsfrist: 8. april 1976.

NUMERISK MATEMATIKK: "Undersøkelse av noen metoder for løsning av baneproblemer."

Oppgaven forutsettes å omfatte:

1. Utvikling av trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder.
2. Undersøkelse av absolutt stabilitet for Størmers og Cowells metoder med og uten trigonometrisk tilpasning.
3. Utvikling av datamaskinrutiner som anvender de ovenfornevnte metoder.
4. Undersøkelse av disse rutiners egenskaper til å løse problemer av klassen $\vec{y}'' = \vec{f}(x, \vec{y})$

Trondheim, den 25. september 1975.

Tore Håvie

Tore Håvie
Avdelingsformann

Tore Håvie

Tore Håvie
Professor i Numerisk Matematikk

Innleveringsfristen er forlenget 2 måneder p.g.a. at kandidaten har vært ansatt som vit.ass., halv stilling under utførelsen av Hovedoppgaven.

Karakter: 1.25

Torsdag.

Denne rapport er en sammenfattning av resultatene av arbeidet med min hovedoppgave ved NTB. Underveis er jeg blitt kvalifisert til entreprenørarbeid ved universitetslektor Sverre P.

UNDERSØKELSE AV NOEN METODER FOR LØSNING AV BANEPROBLEMER
har jeg mottatt god hjelpe fra den tekniske sekretær i instituttet og et
stort takk til alle kollegerne som har turnet tørt kraftig

Hovedoppgave
på meg høppig teknisk hjelpe for

Even Thorbergsen

Norges tekniske høgskole, mars 1978,

Even Thorbergsen.

Institutt for numerisk matematikk,
Norges tekniske høgskole.

Innhold.	Side
Forord.	II
Betegnelser og skrivemåter.	IV
Sammendrag.	1
1. INNLEDNING.	2
2. UTMENING AV TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØPMER- OG COWELLIMETODER.	3
3. NOEN SETNINGER OM DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØPMER- OG COWELLIMETODER.	27
Forord.	
4. ABSOLUTT STABILITET AV STØPMERS OG COWELLS METODER.	35
4.1. Denne rapport er en sammenfatning av resultatene av arbeidet med min hovedoppgave ved NTH. Underveis er jeg blitt kyndig og inspirerende veiledet av universitetslektor Syvert P. Nørsett ved Institutt for numerisk matematikk, NTH. Jeg takker ham og resten av instituttet for gode arbeidsforhold og et tilsynelatende solid budsjett som jeg har kunnet tære kraftig på med hyppig terminalkjøring.	41
4.2. Begrensning av skrifter h på grunn av COSQ-approksimasjon.	93
4.3. Veileder fra Norges tekniske høgskole, mars 1976, metode basert på en.	99
4.4. Startmetode. Even Thorbergsen.	101
4.5. Valg av skritt for startintegrasjonen.	103
4.6. Polynomisk interpolasjon for PNM og SC4.	111
4.7. Utskrift av PNM.	121
4.8. Utskrift av HERDAG.	129
4.9. Utskrift av SC4.	135
5. TEST AV RUTTEN.	136
5.1. Testproblemer.	139
5.2. Presentasjon av testresultatene.	140
5.3. Vurdering av testresultatene.	160
6. KONKLUSJON.	162
7. REFERANSE.	163
Vedlegg 1.	164

Innhold.	Side
Forord.	II
Betegnelser og skrivemåter.	IV
Sammendrag.	1
1. INNLEDNING.	2
2. UTLEDNING AV TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.	4
3. NOEN SETNINGER OM DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.	27
4. ABSOLUTT STABILITET AV STØRMERS OG COWELLS METODER.	35
4.1. Noen satser angående absolutt stabilitet av Størmers og Cowells metoder.	41
4.2. Numerisk undersøkelse av absolute stabilitetsområder for Størmers og Cowells metoder.	58
5. UNDERSØKELSE AV ABSOLUTT STABILITET FOR DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.	74
6. RUTINER BYGD PÅ DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.	91
6.1. CosQ-approksimasjon.	92
6.2. Begrensning av skrittet h på grunn av cosQ-approksimasjonen.	93
6.3. Feilestimering for prediktor-korrektormetode basert på TTS_4 og TTC_4 .	95
6.4. Startmetode.	99
6.5. Valg av skritt for startintegrasjonen.	101
6.6. Polynomisk interpolasjon for PER og SC4.	103
6.7. Utskrift av PER.	111
6.8. Utskrift av PERDIAG.	121
6.9. Utskrift av SC4.	129
7. TEST AV RUTINENE.	135
7.1. Testproblemer.	136
7.2. Presentasjon av testresultatene.	139
7.3. Vurdering av testresultatene.	160
8. KONKLUSJON.	162
9. REFERANSE.	163
Vedlegg 1.	164

Betegnelser og skrivemåter. (definisjon 4.5).

pst = interpolasjonspolynom som brukes i PER og SC4.

Betegnelser: et av alle polynomer av grad høyest lik k.

a x-verdi ved starten av integrasjonsintervallet.

A² matrise som brukes ved trigonometrisk tilpasning av en metode.

B $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix}$ alle reelle tall.

C(Q) approksimasjon til $\cos Q$.

C mengden av komplekse tall.

d lokal trunkeringsfeil for en metode (definisjon 6.1) (betegnes av og til bare trunkeringsfeil).

d_n d i x_n .

e global trunkeringsfeil (definisjon 6.2).

e_n e i x_n .

f den funksjon som definerer problemet ($y'' = f(x, y)$).

f_n f i x_n .

F_k(x) rommet av alle funksjoner av typen $y'' = -\lambda^2 y$ brukt ved $\sum_{j=0}^k (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$, hvor a_j, b_j ikke varierer med x.

$\vec{F}_k(x)$ mengden av vektorer med elementer tilhørende F_k(x).

$\vec{g}(x, \vec{y}) \equiv \vec{f}(x, \vec{y}) + A^2 \vec{y}$

$\vec{G}(x) \equiv \vec{g}(x, \vec{y}(x))$

$\vec{G}_n \equiv \vec{G}(x_n)$ at \vec{G} angir verdiene $a_0, a_1 b_0, a_2 b_1, \dots, a_{n-2} b_{n-1}, c - b_n, c$.

h skritt lengde ved numerisk integrasjon.

int(x_1, x_2, \dots, x_n) er største lukkete intervall i R som inneholder alle x_1, x_2, \dots, x_n .

I enhetsmatrisen

k er slik at $\{\vec{\phi}_{n+v-i}\}_{i=0}^k$ anvendes i den numeriske integrasjonsformel.

N mengden av alle naturlige tall (1, 2, 3, ...).

O(h^r) betegnelse på enhver funksjon av h som oppfyller

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} O(h^r) = \text{endelig konstant} \neq 0$$

p_n orden til en metode (definisjon 4.5).

p(x) interpolasjonspolynom som brukes i PER og SC4.

p_k(x) rommet av alle polynomer av grad høyst lik k.

$\vec{p}_k(x)$ mengden av vektorer med elementer tilhørende p_k(x)
Q med ett element.

Q ≡ hA absolutt stabilitet undersøkes teoretisk og

R mengden av alle reelle tall.

t den uavhengige variabel ved integrasjonen. brukes i en
trigonometrisk tilpasset Størmermetode, k=n.

TTS_n trigonometrisk tilpasset Størmermetode, k=n.

TTC_n trigonometrisk tilpasset Cowellmetode, k=n.

\vec{u}_n numerisk approksimasjon til $\vec{y}(x_n)$.

\vec{u}'_n numerisk approksimasjon til $\vec{y}'(x_n)$.

x den uavhengige variabel ved integrasjonen.

x_n x-verdi etter n'te skritt.

\vec{y} eksakt løsning av et ordinært startverdiproblem.

\vec{y}_n ≡ $\vec{y}(x_n)$

z ≡ λh , λ parameter i testproblemet $y'' = -\lambda^2 y$ brukt ved
undersøkelse av absolutt stabilitet for en metode.

$\epsilon(x_n) \equiv h^{-p} e_n$

$\vec{\phi}_n \equiv \vec{f}(x_n, \vec{u}_n)$

Skrivemåter:

i = a(b)c betyr at i antar verdiene a, a+b, a+2b, ..., c-2b, c-b, c.

i, j = 1, 2 betyr at både i og j antar verdiene 1 og 2.

Sammendrag.

Denne rapporten inneholder en undersøkelse av metoder som løser problemer av typen $\ddot{\vec{y}} = \vec{f}(x, \vec{y})$ (baneproblemer). Først (1.1) generaliseres Størmers og Cowells metoder ved en trigonometrisk tilpasning. En utleder så visse egenskaper ved koeffisientene i disse metodene. Absolutt stabilitet undersøkes teoretisk og numerisk. Det gis en utledning av nødvendige elementer i tre rutiner som baserer seg på disse metodene. Rutinene brukes i en undersøkelse over i hvilke tilfelle en trigonometrisk tilpasning av Størmers og Cowells metoder gir øket effektivitet (nøyaktighet kontra tidsforbruk) ved numerisk integrasjon av baneproblemer.

Undersøkelsen viser at trigonometrisk tilpasning ikke er lik å anbefale for hele klassen av baneproblemer. For underklassen $\ddot{\vec{y}} = -D^2\vec{y} + \vec{r}(x)$, hvor D er en reell diagonal (eller høyst diagonaldominant) matrise og inhomogeniteten \vec{r} er slik at løsningen går asymptotisk mot løsningen av det tilsvarende homogene problem, synes det imidlertid å være til dels store gevinstar å hente ved trigonometrisk tilpasning. Det synes også (1.2) å være fordelaktig med en slik tilpasning av de av disse metodene som er banestabile (Størmers metode, $k=0,1$ og Cowells metode, $k=1,2,3$) når en vil løse problemer av typen $\ddot{\vec{y}} = -A^2\vec{y}$, hvor egenverdiene til den reelle matrise A har stor spredning i størrelsesorden. Det er imidlertid ikke gjort numeriske undersøkelser i dette tilfelle. Cowells (implisitte) metoden, som har reelle koeffisienter (i motsetning til Størmers), følger definisjon 4.31 i praksis kombineres en Størmer-metode med høyre orden til en predikter-korrektormetode.

Disse metodene kan generaliseres på forskjellige måter. Det mest naturlige er en trigonometrisk tilpasning slik at en løser systemer av klassen

$$\ddot{\vec{y}} + A^2\vec{y} = \vec{p}_{k-1}(t) \quad (1.3)$$

eksakt når A^2 er en konstant matrise og \vec{p}_{k-1} refererer til (1.2). Med en slik metode skulle en klasse forvente at også problemer av typen

$$\ddot{\vec{y}} + A^2\vec{y} = \vec{f}(t, \vec{y}) \quad (1.4)$$

kan integreres mer effektivt (nøyaktighet kontra kostnad) enn med
vanlige Størmer-Cowell-metoder dersom

Denne rapporten har som siktemål å presentere endel undersøkelser av kjente og nye metoder for numerisk integrasjon (1.5a) av systemer av ordinære differensielllikninger av typen:

hvor $\vec{y}''(t) = \vec{f}(t, \vec{y})$ (1.1)

Fysisk betraktet inneholder denne klassen av differensielllikninger matematiske beskrivelser av blant annet systemer som beveger seg i tiden uten energidissipasjon. Et eksempel er planet-tyngdepunktbevegelser der luftmotstand ikke er inne i bildet og stråling- og meteormotstand og liknende er neglisjerbar. Når slik motstand skal være med i beskrivelsen, inngår den vesentlig som en funksjon av y' . (1.5b)

De metoder som skal betraktes er lineære flerskritt-metoder av typen:

$$\sum_{i=0}^2 \alpha_i \vec{u}_{n+1-i} + \sum_{j=0}^k \beta_j \vec{\phi}_{n+e-j} = 0 \quad (1.2)$$

Koeffisientene $\{\alpha_i\}_{i=0}^2$ og $\{\beta_j\}_{j=0}^k$ er generelt matrisefunksjoner avhengig av $\vec{f}(t, \vec{y})$, $\alpha_0 \neq 0$, $e=0$ gir en eksplisitt metode, mens $e=1$ gir en implisitt metode.

De mest kjente av disse metodene er Størmers (eksplisitte) og Cowells (implisitte) metoder. Disse har skalare koeffisienter og orden $k+1$. (Se definisjon 4.5) I praksis kombineres en Størmer- og en Cowellmetode med samme orden til en prediktor-korrektormetode.

Disse metodene kan generaliseres på forskjellige måter. Det mest naturlige er en trigonometrisk tilpasning slik at en løser systemer av klassen

$$\vec{y}'' + A^2 \vec{y} = \vec{p}_{k-1}(t) \quad (1.3)$$

eksakt når A^2 er en konstant matrise og k refererer til (1.2).

Med en slik metode skulle en kunne forvente at også problemer av typen

$$\vec{y}'' = \vec{f}(t, \vec{y}) \quad (1.4)$$

kan integreres mer effektivt (nøyaktighet kontra kostnad) enn med vanlige Størmer-Cowell-metoder dersom

$$\left\| \frac{\partial \vec{g}(\vec{x}, \vec{y})}{\partial \vec{y}} \right\| \ll \| A^2 \| \quad (1.5a)$$

$$\left\| \vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) - \vec{g}(t, \vec{y}) \right\| \quad (2.1)$$

hvor tilhørende homogene likning

$$\dot{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{y}) + A^2 \vec{y} \quad (1.5b)$$

når en velger A^2 passe (så nær opptil $-\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ som mulig).

Hvis $\dot{\vec{y}}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ vil løsningen være en trigonometrisk funksjon av tA som vi vil betegne med Q i fortsettelsen. En må da kunne vente at metodens koeffisienter også vil inneholde trigonometriske funksjoner av Q . For generell Q må disse funksjonene approksimeres med rasjonale funksjoner (f.eks. polynomer). Dersom Q er diagonal kan de beregnes direkte ved hjelp av datamaskin-systemets standardfunksjoner og en bedre nøyaktighet bør kunne oppnås.

Da \vec{y} er "av samme dimensjon som A , kan å finne en passende, ikke-ekstremal utformning til et 1. ordens prosess...

$$\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \dot{\vec{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y} \\ -A^2 \vec{y} + \vec{g}(t, \vec{y}) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Betrakter så $\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \dot{\vec{y}} \end{pmatrix}$ med \vec{y} .

Dermed

$$\dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{g}(t, \vec{y}) \end{pmatrix} \quad (2.6a)$$

eller

$$\dot{\vec{y}} = B\vec{y} + \vec{f}(t, \vec{y}) \quad (2.6b)$$

der

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

og

$$\vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{g}(t, \vec{y}) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2. UTLEDNING AV TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

Gitt problemet

$$\vec{y}'' + A^2 \vec{y} = \vec{g}(t, \vec{y}) \quad (2.1)$$

hvor A er et tall med all størrelse,

og finnes ved å betrakte (2.6b).

med tilhørende homogene likning

$$\vec{y}'' + A^2 \vec{y} = \vec{0} \quad (2.2)$$

Generell løsning av (2.2) er velkjent:

$$\vec{y}_h(t) = \cos(At)\vec{c}_1 + \sin(At)\vec{c}_2 \quad (2.3)$$

der har løsning

$$\cos(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (At)^{2i}}{(2i)!} \quad (2.4a)$$

og

$$\sin(At) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (At)^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad (2.4b)$$

som da er matriser av samme dimensjon som A . For å finne en partikulær løsning av (2.1) omformes likningen til et 1. ordens problem:

$$\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \vec{y}' \\ -A^2 \vec{y} + \vec{g}(t, \vec{y}) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Betrakter så $\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \end{pmatrix}$ med \vec{Y} .

Herav:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{g}(t, \vec{Y}) \end{pmatrix} \quad (2.6a)$$

eller

$$\vec{Y}' = B\vec{Y} + \vec{f}(t, \vec{Y}) \quad (2.6b)$$

der

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

og

$$\vec{f}(t, \vec{Y}) = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{g}(t, \vec{Y}) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

For (2.6b) kjennes følgende partikulær løsning:

$$\vec{Y}_p(t) = \int_a^t e^{B(t-\tau)} \vec{f}(\tau, \vec{Y}(\tau)) d\tau \quad (2.9)$$

Fra (2.12, 14, 16) følger at

hvor a er en vilkårlig reell størrelse.

e^{Bt} finnes ved å betrakte (2.6b).

Ordnet:

Insistras (2.17) i (2.9) får en at

$$\vec{Y}' - B\vec{Y} = \vec{f}(t, \vec{Y}) \quad (2.10)$$

Tilsvarende homogene problem:

$$\vec{Y}'_h - B\vec{Y}_h = \vec{0} \quad (2.11)$$

som har løsning $\vec{Y}_h = e^{-At} \vec{c}_0$

$$\vec{Y}_h = e^{Bt} \vec{c}_0 \quad (2.12)$$

Fra (2.3): $y_h(t) = \cos(At)t + \sin(At)\frac{d}{dt}y_h(t) + \sin(At)\vec{c}_1 + \cos(At)\vec{c}_2$

Innledningsverdiene:

Herav:

$$\vec{y}(a) = \vec{c}_1 + \vec{Y}(a) = \vec{c}_1 \quad (2.22)$$

$$\vec{Y}'_h = -A\sin(At)\vec{c}_1 + A\cos(At)\vec{c}_2 \quad (2.13)$$

Fra (2.22) og (2.13):

En har da:

$$\vec{c}_0 = \vec{Y}_h(0) = \begin{bmatrix} \vec{Y}_h(0) \\ \vec{Y}'_h(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ A\vec{c}_2 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Fra (2.3) og (2.13):

$$\vec{Y}_h = \begin{bmatrix} \cos(At)\vec{c}_1 + \sin(At)\vec{c}_2 \\ -A\sin(At)\vec{c}_1 + A\cos(At)\vec{c}_2 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Ordnet: $\vec{Y}'(a) = Ad\vec{c}_0 = \vec{f}(a)$

$$\vec{Y}_h = \begin{bmatrix} \cos(At) & A^{-1}\sin(At) \\ -A\sin(At) & \cos(At) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{c}_1 \\ A\vec{c}_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\vec{c}_2 = \vec{c}_1 + A^{-1}\vec{c}_0 \quad (2.26)$$

Vi har her benyttet at alle analytiske funksjoner av en matrise kommuterer. Dette følger umiddelbart av definisjonen av analytiske funksjoner (eksistensen av eksakt potensrekkepresentasjon).
Fra (2.12, 14, 16) følger at

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(At) & A^{-1}\sin(At) \\ -A\sin(At) & \cos(At) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Innsettes (2.17) i (2.9) får en at

$$\vec{y}_p(t) = \int_a^t \begin{pmatrix} \cos(A(t-\tau)) & A^{-1}\sin(A(t-\tau)) \\ -A\sin(A(t-\tau)) & \cos(A(t-\tau)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{d} \\ \vec{g}(\tau, \vec{y}(\tau)) \end{pmatrix} d\tau \quad (2.18)$$

Altså:

$$\vec{y}_p(t) = \int_a^t A^{-1}\sin(A(t-\tau)) \vec{g}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \quad (2.19)$$

Generell løsning av problemet er da etter ordning av $y_h(t)$:

$$\vec{y}(t) = \cos(A(t-a))\vec{d}_1 + \sin(A(t-a))\vec{d}_2 + \int_a^t A^{-1}\sin(A(t-\tau)) \vec{g}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \quad (2.21)$$

Initialbetingelser:

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a, \quad \vec{y}'(a) = \vec{y}'_a \quad (2.22)$$

Fra (2.21):

$$\vec{y}(a) = \vec{d}_1 = \vec{y}_a \quad (2.23)$$

$$\vec{y}'(t) = -A\sin(A(t-a))\vec{d}_1 + A\cos(A(t-a))\vec{d}_2 \quad (2.24)$$

$$+ \int_a^t A^{-1}A\cos(A(t-\tau)) \vec{g}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \quad (2.33b)$$

$$\vec{y}'(a) = A\vec{d}_2 = \vec{y}'_a \quad (2.25)$$

eller

$$\vec{d}_2 = A^{-1}\vec{y}'_a \quad (2.26)$$

Fra (2.21, 23, 26) følger nå:

$$\vec{y}(t) = \cos(A(t-a))\vec{y}_a + A^{-1} \sin(A(t-a))\vec{y}'_a + \int_a^t A^{-1} \sin(A(t-\tau)) \vec{g}(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (2.27)$$

Tilsvarende kan en sette:

$$\vec{y}(t+x) = \cos(Ax)\vec{y}(t) + A^{-1} \sin(Ax)\vec{y}'(t) + \int_t^{t+x} A^{-1} \sin(A(t+x-\tau)) \vec{g}(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (2.28)$$

Denne relasjonen inneholder $\vec{y}'(t)$ som ikke inngår i det opprinnelige problem. Det er derfor ønskelig å kombinere den bort. Setter:

Fra (2.3b) og (2.27) følger da til slutt:

$$\vec{\psi}(t, x) \equiv \int_t^{t+x} A^{-1} \sin(A(t+x-\tau)) \vec{G}(\tau) d\tau \quad (2.29)$$

hvor

$$\vec{G}(\tau) \equiv \vec{g}(\tau, y(\tau)) \quad (2.30)$$

Fra (2.28) får en:

$$\vec{y}(t+x) = \cos(Ax)\vec{y}(t) + A^{-1} \sin(Ax)\vec{y}'(t) + \vec{\psi}(t, x) \quad (2.31)$$

$$\vec{y}(t-h) = \cos(Ah)\vec{y}(t) - A^{-1} \sin(Ah)\vec{y}'(t) + \vec{\psi}(t, -h) \quad (2.32)$$

Multipliserer så (2.31) med $\sin(Ah)$ og (2.32) med $\sin(Ax)$ og adderer:

$$\sin(Ah)\vec{y}(t+x) + \sin(Ax)\vec{y}(t-h) \quad (2.38)$$

$$= (\sin(Ah)\cos(Ax) + \cos(Ah)\sin(Ax))\vec{y}(t) \quad (2.33a)$$

Integrasjonen $\int_a^t \vec{G}(\tau) d\tau$ til $t-h+h$ innatt

Newton's bakoverdifferanselag, må gittet $\vec{G}(n+1)$, $\vec{G}(n)$, $\vec{G}(n-1)$, ..., $\vec{G}(0)$

$$\begin{aligned} &= \sin(A(x+h))\vec{y}(t) + \int_{t-h}^t A^{-1} \sin(Ah) \sin(A(t+x-\tau)) \vec{G}(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_t^{t+x} A^{-1} \sin(Ax) \sin(A(t-h-\tau)) \vec{G}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.33b)$$

Setter så

$$\tau' \equiv t + \frac{x}{h}(t-\tau) \quad (2.34a)$$

Normaler til

i siste integral I. Motsatt:

$$\text{Det gir: } \tau = t + \frac{h}{x}(t - \tau') \quad (2.34b)$$

$$\text{Det gir: } P(s) \cdot G(\tau(s)) = \sum_{j=0}^k \frac{h s \cdot h(s+1) \cdot h(s+2) \cdots h(s+j-1)}{j! h} \nabla^j G_n \quad (2.42)$$

$$\vec{\mathbf{f}} = \int_t^{t+x} A^{-1} \sin(Ax) \sin(A(-\frac{h}{x}(t-\tau')-h)) \vec{G}(t + \frac{h}{x}(t-\tau')) \frac{h}{x} (-d\tau') \quad (2.35a)$$

$$\text{der: } = \int_t^{t+x} A^{-1} \frac{h}{x} \sin(Ax) \sin(A \frac{h}{x}(t+x-\tau')) \vec{G}(t + \frac{h}{x}(t-\tau')) d\tau' \quad (2.35b)$$

Fra (2.33b) og (2.35b) følger da til slutt:

$$\sin(Ah) \vec{y}(t+x) = \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} & \sin(A(x+h)) \vec{y}(t) - \sin(Ax) \vec{y}(t-h) \\ & + A^{-1} \int_t^{t+x} \{ \sin(Ah) \sin(A(t+x-\tau)) \vec{G}(\tau) \} d\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$+ \frac{h}{x} \sin(Ax) \sin(A \frac{h}{x}(t+x-\tau)) \vec{G}(t + \frac{h}{x}(t-\tau)) d\tau \quad (2.45)$$

Lenger enn dette er det ikke mulig å komme eksakt uten kjennskap til \vec{G} . Nå erstattes derfor $G(\tau)$ med et interpolasjonspolynom.

Betegner:

$$\vec{G}_j = \vec{G}(\tau_j) \quad (2.37)$$

og

$$\tau_n = t \quad (2.38)$$

Integrasjonen i (2.36) skal nå gå fra $t-vh$ til $t-vh+rh$ innsatt Newtons bakoverdifferansformel basert på gitteret $\{\tau_{n-j}\}_{j=0}^k$. v antar verdiene 0 og 1, og $r \in [0,1]$.

$$\vec{G}(\tau) = \sum_{j=0}^k \frac{\prod_{i=0}^{j-1} (\tau - \tau_{n-i})}{j! h^j} \nabla^j G_n + \frac{\prod_{i=0}^k (\tau - \tau_{n-i})}{(k+1)!} \vec{G}^{(k+1)}(\xi(\tau)) \quad (2.39)$$

hvor

$$\xi(\tau) \in \text{int}(\tau, \tau_n, \tau_{n-k}) \quad (2.40)$$

Normerer til

$$s = \frac{\tau - \tau_n}{h} \quad (2.41)$$

Det gir:

$$\vec{F}(s) \equiv \vec{G}(\tau(s)) = \sum_{j=0}^k \frac{hs \cdot h(s+1) \cdot h(s+2) \cdots h(s+j-1)}{j! h^j} v^j \vec{G}_n^{(k+1)}(n(s)) + \frac{hs \cdot h(s+1) \cdot h(s+2) \cdots h(s+k)}{(k+1)!} \vec{G}^{(k+1)}(n(s))$$
(2.42)

Diffrater så $\vec{g}(Q, r, v)$ ved

der

$$n(s) \equiv \xi(\tau(s))$$
(2.43)

Altså:

$$\vec{F}(s) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{(-s)!}{j! (-s-j)!} v^j \vec{G}_n$$
(2.44)

$$+ (-1)^{k+1} h^{k+1} \frac{(-s)!}{(k+1)! (-s-(k+1))!} \vec{G}^{(k+1)}(n(s))$$

$$= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s}{j} v^j \vec{G}_n + (-1)^{k+1} h^{k+1} \binom{-s}{k+1} \vec{G}^{(k+1)}(n(s))$$
(2.45)

Integratorer nå (2.36) fra $t-vh$ til $t+(r-v)h$:

$$\begin{aligned} \vec{D} &\equiv \sin(Ah) \vec{y}(t+(r-v)h) - \sin(Ah(r+1)) \vec{y}(t-vh) + \sin(Ahr) \vec{y}(t-(v+1)h) \\ &= A^{-1} \int_{t-vh}^{t+(r-v)h} \{\sin(A(t+(r-v)h-\tau)) \sin(Ah) \vec{G}(\tau) \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin(A \frac{1}{r}(t+(r-v)h-\tau)) \sin(Ahr) \vec{G}(\frac{r+1}{r}(t-vh) - \frac{\tau}{r})\} d\tau \end{aligned}$$
(2.46)

Normerer også her til s og setter $Ah=Q$ ($\tau=t+sh$):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= A^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{\sin(Q(r-v-s)) \sin Q \cdot \vec{F}(s) \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)) \sin(Qr) \vec{F}(-\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r})\} h \cdot ds \end{aligned}$$
(2.48)

Setter så inn (2.45) i (2.48):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= h^2 Q^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{\sin(Q(r-v-s)) \sin Q \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{-s}{j} v^j \vec{G}_n \\ &\quad + \frac{1}{r} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)) \sin(Qr) \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\frac{r+1}{r}v + \frac{s}{r}}{j} v^j \vec{G}_n\} ds \end{aligned}$$
(2.54)

$$\begin{aligned}
 & + (-1)^{k+1} h^{k+2} A^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{ \sin(Q(r-v-s)) \sin Q \left(\frac{-s}{k+1} \right) \vec{G}^{(k+1)}(n(s)) \\
 & + \frac{1}{r} \sin \left(\frac{Q}{r}(r-v-s) \right) \sin(Qr) \left(\frac{\frac{r+1}{r}v + \frac{s}{r}}{k+1} \right) \\
 I_1 = & \{ \sin(Q(r-v-s)) \left(-\frac{1}{1-\rho} \right) \cdot \frac{1}{\ln(1-\rho)} ds \\
 & - \int_{-v}^{r-v} (-Q) \cos(Q(r-v-s)) \left(-\frac{1}{1-\rho} \right) \cdot \frac{1}{\ln(1-\rho)} ds
 \} ds
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Definerer så $\sigma_j(Q, r, v)$ ved

$$\vec{D} \equiv h^2 \sin Q \sum_{j=0}^k \sigma_j(Q, r, v) \nabla^j \vec{G}_n + \sin Q \cdot \vec{R}_k \tag{2.50}$$

Det vil si at:

$$\sigma_j(Q, r, v) = (-1)^j Q^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{ \sin(Q(r-v-s)) \left(\frac{-s}{j} \right) \tag{2.51}$$

$$+ (r \sin Q)^{-1} \sin \left(\frac{Q}{r}(r-v-s) \right) \sin(Qr) \cdot \left(\frac{\frac{r+1}{r}v + \frac{s}{r}}{j} \right) \} ds \tag{2.59}$$

\vec{R}_k behandles senere. Innfører genererende funksjon for koeffisientene:

$$K(Q, r, v, \rho) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q, r, v) \rho^j \tag{2.52}$$

$$K(Q, r, v, \rho) = Q^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{ \sin(Q(r-v-s)) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{-s}{j} \right) \rho^j \} ds \tag{2.61}$$

$$= Q^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{ \sin(Q(r-v-s)) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{-s}{j} \right) \rho^j \} ds \tag{2.53}$$

$$+ Q^{-1} (r \sin Q)^{-1} \sin(Qr) \int_{-v}^{r-v} \{ \sin \left(\frac{Q}{r}(r-v-s) \right) \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{\frac{r+1}{r}v + \frac{s}{r}}{j} \right) \rho^j \} ds$$

$$= Q^{-1} \int_{-v}^{r-v} \sin(Q(r-v-s)) (1-\rho)^{-s} ds \tag{2.54}$$

$$+ (Q r \sin Q)^{-1} \sin(Qr) \int_{-v}^{r-v} \sin \left(\frac{Q}{r}(r-v-s) \right) (1-\rho)^{\frac{r+1}{r}v + \frac{s}{r}} ds \tag{2.63}$$

Setter:

$$I_1 = \int_{-v}^{r-v} \sin(Q(r-v-s)) (1-\rho)^{-s} ds \tag{2.55}$$

$$+ (1-\rho \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr)$$

Ved delvis integrasjon:

$$I_1 = [\sin(Q(r-v-s))(-\frac{(1-\rho)^{-s}}{\ln(1-\rho)})]_{-v}^{r-v} \quad (2.56)$$

$$= \int_{-v}^{r-v} (-Q) \cos(Q(r-v-s))(-\frac{(1-\rho)^{-s}}{\ln(1-\rho)}) ds \quad (2.63)$$

$$= \frac{\sin(Qr)(1-\rho)^v}{\ln(1-\rho)} - \frac{Q}{\ln(1-\rho)} \int_{-v}^{r-v} \cos(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s} ds \quad (2.57)$$

Setter videre:

$$I_3 = \int_{-v}^{r-v} \cos(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s} ds \quad (2.58)$$

Tilsvarende fås:

$$I_3 = -\frac{(1-\rho)^{v-r}}{\ln(1-\rho)} - \frac{\cos(Qr)(-(1-\rho)^v)}{\ln(1-\rho)} \quad (2.67a)$$

$$+ \frac{Q}{\ln(1-\rho)} \int_{-v}^{r-v} \sin(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s} ds \quad (2.67b)$$

Settes (2.59) inn i (2.57) finnes eksplisitt:

$$I_1 = \{(\ln(1-\rho))^2 I + Q^2\}^{-1} (1-\rho)^v \{ \sin(Qr) \ln(1-\rho) + Q(1-\rho)^{-r} - Q \cos(Qr) \} \quad (2.61)$$

Setter nå

$$I_2 = \int_{-v}^{r-v} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))(1-\rho)^{\frac{r+1}{r}v + \frac{s}{r}} ds \quad (2.62)$$

To ganger delvis integrasjon og ordning gir:

$$I_2 = \{(\ln(1-\rho))^2 I + Q^2\}^{-1} (1-\rho)^v r \{ -\sin Q \ln(1-\rho) + Q(1-\rho)^{-r} - Q \cos Q \} \quad (2.63)$$

Setter (2.61) og (2.63) inn i (2.54):

$$K(Q, r, v, \rho) \quad (2.64)$$

$$= \{(\ln(1-\rho))^2 I + Q^2\}^{-1} (1-\rho)^v \{ (1-\rho)^{-r} - \cos(Qr)$$

$$+ (1-\rho-\cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \}$$

Ønsker nå å finne en rekursjonsformel for koeffisientene $\sigma_j(Q, r, v)$ fra den genererende funksjon $K(Q, r, v, \rho)$.

Fra (2.52) og (2.64) har en:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \rho^j \{ (\ln(1-\rho))^2 I + Q^2 \} \quad (2.65)$$

$$= (1-\rho)^v \{ (1-\rho)^{-r} - \cos(Qr) + (1-\rho-\cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \} \quad (2.72)$$

Utvikler med hensyn på ρ :

$$-\ln(1-\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{1-x} dx = \int_0^\rho \sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1} dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^\rho x^{j-1} dx \quad (2.66a, b, c)$$

$$\ln(1-\rho) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \rho^j \quad (2.66d)$$

$$\text{Derav: } (\ln(1-\rho))^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \rho^j \right)^2 \quad (2.67a)$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j(m-j)} \rho^m \quad (2.67b)$$

$$= \sum_{m=2}^{\infty} S_m \rho^m \quad (2.67c) \quad (2.75)$$

der

$$S_m = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j(m-j)} \quad (\text{Se tabell 2.1}) \quad (2.68)$$

$$(1-\rho)^v = 1-v\rho \quad (2.69)$$

siden v bare antar verdiene 0 og 1.

$$(1-\rho)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-r}{j} \rho^j \quad (2.70)$$

Innsatt i (2.64):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \rho^j \{ Q^2 + I \sum_{m=2}^{\infty} S_m \rho^m \} + v(\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \quad (2.77)$$

$$= (1-v\rho) \{ I \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-r}{i} \rho^i - \cos(Qr) \} \quad (2.71)$$

$$+ ((1-\rho) I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \quad (2.78a)$$

Innfører $k=j+m$ på venstre side og $k=i$ på høyre side og ordner likningen:

$$\begin{aligned}
 & Q^2(\sigma_0 + \sigma_1 \rho) + \sum_{k=2}^{\infty} (\sigma_k Q^2 + \sum_{j=0}^{k-2} \sigma_j s_{k-j}) \rho^k \\
 & = I \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \rho^k \left\{ \binom{-r}{k} + v \binom{-r}{k-1} \right\} + (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \\
 & \quad - \cos(Qr) + I + \{v(\cos(Qr)) - (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr)\} \\
 & \quad - (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \} \rho + v (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \rho^2
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Betrakter (2.72) for hver potens av ρ .

ρ^0 :

$$Q^2 \sigma_0 = (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - \cos(Qr) + I \tag{2.73}$$

Herav:

$$\sigma_0 = Q^{-2} \{ (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) + I - \cos(Qr) \} \tag{2.74}$$

ρ^1 :

$$\begin{aligned}
 Q^2 \sigma_1 & = -I(-r+v) + v(\cos(Qr)) - (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \\
 & \quad - (\sin Q)^{-1} \sin(Qr)
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Det vil si:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 & = Q^{-2} \{ rI - (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - v((I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \\
 & \quad + I - \cos(Qr)) \}
 \end{aligned} \tag{2.76a}$$

$$\sigma_1 = Q^{-2} \{ rI - (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - v \sigma_0 \} \tag{2.76b}$$

ρ^2 :

$$\sigma_2 Q^2 + \sigma_0 s_2 = I \left(\binom{-r}{2} - vr \right) + v (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 & = Q^{-4} \left\{ \binom{-r}{2} Q^2 + v ((\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - rI) Q^2 \right. \\
 & \quad \left. - (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - I + \cos(Qr) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.78a}$$

$$\sigma_2 = Q^{-2} \left\{ \binom{-r}{2} + v ((\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - rI) - \sigma_0 \right\} \tag{2.78b}$$

$$\text{Tabell 2.1. } S_m = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j(m-j)}, \quad m=2(1)20.$$

m	S_m	
	Eksakt	Numerisk
2	1	1.000000000
3	1	1.000000000
4	$\frac{11}{12}$	0.916666667
5	$\frac{5}{6}$	0.833333333
6	$\frac{137}{180}$	0.761111111
7	$\frac{7}{10}$	0.700000000
8	$\frac{363}{560}$	0.648214286
9	$\frac{761}{1260}$	0.603968254
10	$\frac{7129}{12600}$	0.565793651
11		0.532539683
12		0.503312891
13		0.477417027
14		0.454304822
15		0.433541644
16		0.414778624
17		0.397732823
18		0.382172503
19		0.367906114
20		0.354773966

Fra (2.46) og (2.50) følger at den generelle integrasjonsformel kan skrives:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{n-v+1} &= (\sin Q)^{-1} (\sin(Qx+V)) \hat{u}_{n-v} - \sin(Qx) \hat{u}_{n-v-1} \\ &\quad + n^2 \sum_{j=0}^k a_j(Q, x, v) \hat{u}_{n-j} \end{aligned} \quad (2.85)$$

$\rho^k, k \geq 3:$

Følger fra (2.85) at integrasjonsformler:

$v=0:$ Trigonometrisk tilpasset Størmermetode (eksplisitt).

$$\sigma_k Q^2 + \sum_{j=0}^{k-2} \sigma_j s_{k-j} = (-1)^k \left(\binom{-r}{k} + v \binom{-r}{k-1} \right) I \quad (2.79)$$

Fra (2.81a, b, c, 81, 84) følger nå:

Ordnet:

$$\sigma_k = Q^{-2} \left\{ (-1)^k \left(\binom{-r}{k} + v \binom{-r}{k-1} \right) I - \sum_{j=0}^{k-2} s_{k-j} \sigma_j \right\} \quad (2.80)$$

Detaljert utvikling:

En kan da stille opp følgende rekursjonsformel for $\{\sigma_j\}_{j=0}^\infty:$

$$\sigma_0 = Q^{-2} \left\{ (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) + I - \cos(Qr) \right\} \quad (2.81a)$$

$$\sigma_1 = Q^{-2} \left\{ rI - (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - v((I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr)) \right. \quad (2.81b)$$

$$\left. + I - \cos(Qr) \right\}$$

$$\sigma_2 = Q^{-4} \left\{ \left(\binom{-r}{2} + v(\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - rI \right) Q^2 \right. \quad (2.81c)$$

$$\left. - (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - I + \cos(Qr) \right\}$$

$$\sigma_j = Q^{-2} \left\{ (-1)^j \left(\binom{-r}{j} + v \binom{-r}{j-1} \right) I - \sum_{i=0}^{j-2} s_{j-i} \sigma_i \right\}, j \geq 3 \quad (2.81d)$$

Fra (2.81) fås nå:

$$\sigma_3 = Q^{-4} \left\{ - \left(\binom{-r}{3} + v \binom{-r}{2} \right) Q^2 + (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - rI \right. \quad (2.84)$$

$$\left. + (v-1)((I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) + I - \cos(Qr)) \right\}$$

$$\sigma_4 = Q^{-6} \left\{ \left(\binom{-r}{4} + v \binom{-r}{3} \right) Q^4 - \left(\binom{-r}{2} \right) Q^2 + (1-v) Q^2 ((\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - rI) \right. \quad (2.84)$$

$$\left. + \left((v - \frac{11}{12}) Q^2 + I \right) ((I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) + I - \cos(Qr)) \right\}$$

Fra (2.46) og (2.50) følger at den generelle integrasjonsformel kan skrives:

$$\vec{u}_{n-v+r} = (\sin Q)^{-1} \left\{ \sin(Q(r+1)) \vec{u}_{n-v} - \sin(Qr) \vec{u}_{n-v-1} \right\} \quad (2.85)$$

$$+ h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j(Q, r, v) \nabla^j \vec{G}_n$$

Med $r=1$ følger fra (2.85) to integrasjonsformler:

$v=0$: Trigonometrisk tilpasset Størmermetode(eksplisitt).

$v=1$: Trigonometrisk tilpasset Cowellmetode(implisitt).

Fra (2.81a,b,c,83,84) følger nå:

Størmerkoeffisientene ($r=1, v=0$):

$$\sigma_0 = Q^{-2} \{2I - 2\cos Q\} \quad (2.86)$$

Altså:

$$\sigma_1 = 0 \quad (2.87)$$

$$\sigma_2 = Q^{-4} \{Q^2 - 2I + 2\cos Q\} \quad (2.88)$$

$$\sigma_3 = Q^{-4} \{Q^2 - 2I + 2\cos Q\} \quad (2.89)$$

$$\sigma_4 = Q^{-6} \{Q^4 - \frac{17}{6}Q^2 + 2I + (\frac{11}{6}Q^2 - 2I)\cos Q\} \quad (2.90)$$

Cowellkoeffisientene ($r=1, v=1$):

$$\sigma_0^* = Q^{-2} \{2I - 2\cos Q\} = \sigma_0 \quad (2.91)$$

$$\sigma_1^* = Q^{-2} \{-2I + 2\cos Q\} = -\sigma_0 \quad (2.92)$$

$$\sigma_2^* = Q^{-4} \{Q^2 - 2I + 2\cos Q\} = \sigma_2 \quad (2.93)$$

$$\sigma_3^* = 0 \quad (2.94)$$

$$\sigma_4^* = Q^{-6} \{-\frac{5}{6}Q^2 + 2I - (\frac{1}{6}Q^2 + 2I)\cos Q\} \quad (2.95)$$

Innfører følgende matrisefunksjoner:

Ønsker nå å finne de tilsvarende β -koeffisientene som er slik at:

$$\beta(Q, r) = (1 - \cos Q)(\sin Q)^{-1} \sin(Qr) + I - \cos(Qr) \quad (2.106)$$

$$\sum_{j=0}^k \beta_j \vec{G}_{n-j} = \sum_{i=0}^k \sigma_i v^i \vec{G}_n \quad (2.96)$$

$$(2.107)$$

En har at:

$$v^i \vec{G}_n = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \vec{G}_{n-j} \quad (2.97)$$

Setter inn (2.97) i (2.96):

$$\sum_{j=0}^k \beta_j \vec{G}_{n-j} = \sum_{i=0}^k \sigma_i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \vec{G}_{n-j} \quad (2.98a)$$

$$= \sum_{j=0}^k \left\{ (-1)^j \sum_{i=j}^k \binom{i}{j} \sigma_i \right\} \vec{G}_{n-j} \quad (2.98b)$$

Altså:

$$+ ((1-2v) \binom{-r}{2} + (2v-7) I) T_2(Q, r) \quad (2.102)$$

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^k \binom{i}{j} \sigma_i \quad (2.99)$$

$$\beta_0 = Q^{-6} \left(\left((9v - \frac{1}{2}) \binom{-r}{2}^2 + 6I \right) T_1(Q, r) + (vQ^2 + (9-6v) I) T_2(Q, r) \right) \quad (2.110)$$

I anvendelsene vil k=4 benyttes.

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^4 \binom{i}{j} \sigma_i \quad (2.100)$$

Herav fås:

$$\beta_0 = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 \quad (2.101)$$

$$\beta_1 = -(\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + 4\sigma_4) \quad (2.102)$$

$$\beta_2 = \sigma_2 + 3\sigma_3 + 6\sigma_4 \quad (2.103)$$

Fra (2.85) og (2.96) følger integrasjonsformelen (k=4):

$$\beta_3 = -(\sigma_3 + 4\sigma_4) \quad (2.104)$$

$$\beta_4 = \sigma_4 \quad (2.105)$$

Innfører følgende matrisefunksjoner:

$$T_1(Q, r) = (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(Qr) + I - \cos(Qr) \quad (2.106)$$

$$T_2(Q, r) = ((\sin Q)^{-1} \sin(Qr) - rI) Q^2 \quad (2.107)$$

Setter nå inn i (2.101-105):

$$\beta_0 = Q^{-6} \{ ((1-v)Q^4 + (2v - \frac{35}{12})Q^2 + I) T_1(Q, r)$$

$$+ ((v-1)Q^2 + (2-v)I) T_2(Q, r) - I \cos Q \} \quad (2.108)$$

$$\beta_1 = Q^{-6} \{ ((1-v)(-\frac{r}{2}) - (-\frac{r}{3}) + (-\frac{r}{4}))Q^4 - (-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.115)$$

$$\beta_1 = Q^{-6} \{ (vQ^4 + (\frac{26}{3} - 7v)Q^2 - 4I) T_1(Q, r)$$

$$+ ((1-2v)Q^2 + (2v-7)I) T_2(Q, r) - I \cos Q \} \quad (2.109)$$

$$\beta_4 = Q^{-6} \{ ((3v-2)(-\frac{r}{2}) + (3-4v)(-\frac{r}{3}) - 4(-\frac{r}{4}))Q^4 + 4(-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.118)$$

$$\beta_2 = Q^{-6} \{ ((9v - \frac{19}{2})Q^2 + 6I) T_1(Q, r) + (vQ^2 + (9-6v)I) T_2(Q, r)$$

$$+ ((1-3v)(-\frac{r}{2}) + (6v-3)(-\frac{r}{3}) + 6(-\frac{r}{4}))Q^4 - 6(-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.119)$$

$$\beta_3 = Q^{-6} \{ ((\frac{14}{3} - 5v)Q^2 - 4I) T_1(Q, r) + (4v-5)T_2(Q, r)$$

$$+ (v(-\frac{r}{2}) + (1-4v)(-\frac{r}{3}) - 4(-\frac{r}{4}))Q^4 + 4(-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.111)$$

$$+ (v(-\frac{r}{2}) + (1-4v)(-\frac{r}{3}) - 4(-\frac{r}{4}))Q^4 + 4(-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.120)$$

$$\beta_4 = Q^{-6} \{ ((v - \frac{11}{12})Q^2 + I) T_1(Q, r) + (1-v)T_2(Q, r)$$

$$+ (v(-\frac{r}{3}) + (-\frac{r}{4}))Q^4 - (-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.112)$$

$$+ (v(-\frac{r}{3}) + (-\frac{r}{4}))Q^4 - (-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.122)$$

Fra (2.85) og (2.96) følger integrasjonsformelen ($k=4$):

$$\vec{u}_{n+r-v} = (\sin Q)^{-1} \{ \sin(Q(r+1)) \vec{u}_{n-v} - \sin(Qr) \vec{u}_{n-v-1} \}$$

$$+ \sum_{j=0}^4 \beta_j(Q, r, v) (h^2 \vec{\phi}_{n-j} + Q^2 \vec{u}_{n-j}) \quad (2.113)$$

Går nå over til å betrakte spesialtilfeller.

$$+ \sum_{j=1}^4 \beta_j^*(h^2 \vec{\phi}_{n+1-j} + Q^2 \vec{u}_{n+1-j}) \quad (2.125)$$

$$\vec{u}_{n+1} = f(t_{n+1}, \vec{u}_{n+1}) \quad (2.126)$$

Prediktorkoeffisienter ($r=1, v=0$): PERDIAG ($v=1$)

$$\beta_0 = Q^{-6} \{ 5Q^4 - \frac{41}{6}Q^2 + 2I + (-2Q^4 + \frac{35}{6}Q^2 - 2I) \cos Q \} \quad (2.114)$$

$$\beta_1 = Q^{-6} \{ -9Q^4 + \frac{64}{3}Q^2 - 8I + (-\frac{52}{3}Q^2 + 8I) \cos Q \} \quad (2.115)$$

$$\beta_2 = Q^{-6} \{ 10Q^4 - 25Q^2 + 12I + (19Q^2 - 12I) \cos Q \} \quad (2.116)$$

$$\beta_3 = Q^{-6} \{ -5Q^4 + \frac{40}{3}Q^2 - 8I + (-\frac{28}{3}Q^2 + 8I) \cos Q \} \quad (2.117)$$

$$\beta_4 = Q^{-6} \{ Q^4 - \frac{17}{6}Q^2 + 2I + (\frac{11}{6}Q^2 - 2I) \cos Q \} \quad (2.118)$$

Prediktorformelen blir da:

$$\vec{\hat{u}}_{n+1} = 2\cos Q \cdot \vec{\hat{u}}_n - \vec{\hat{u}}_{n-1} + \sum_{j=0}^4 \beta_j (h^2 \vec{\hat{\phi}}_{n-j} + Q^2 \vec{\hat{u}}_{n-j}) \quad (2.119)$$

$$\vec{\hat{u}}_4(x) = Q^{-6} \{ (\frac{1}{2}Q^2 + 1)T_1(\frac{1}{2}) + ((-\frac{r}{3}) + (-\frac{r}{4}))Q^4 - (\frac{-r}{2})Q^2 \} \quad (2.131)$$

Korrektorkoeffisienter ($r=1, v=1$):

Interpolasjonsformelen kan da uttrykkes således:

$$\beta_0^* = Q^{-6} \{ Q^4 - \frac{17}{6}Q^2 + 2I + (\frac{11}{6}Q^2 - 2I) \cos Q \} \quad (2.120)$$

$$\beta_1^* = Q^{-6} \{ \frac{22}{3}Q^2 - 8I + (-2Q^4 - \frac{10}{3}Q^2 + 8I) \cos Q \} \quad (2.121)$$

$$\beta_2^* = Q^{-6} \{ Q^4 - 7Q^2 + 12I + (Q^2 - 12I) \cos Q \} \quad (2.122)$$

Når metoden skal anvendes i praksis er det ønskelig å kunne halvere

$$\beta_3^* = Q^{-6} \{ \frac{10}{3}Q^2 - 8I + (\frac{2}{3}Q^2 + 8I) \cos Q \} \quad (2.123)$$

$$\beta_4^* = Q^{-6} \{ -\frac{5}{6}Q^2 + 2I - (\frac{1}{6}Q^2 + 2I) \cos Q \} = -\frac{1}{4}\beta_3^* \quad (2.124)$$

Koeffisientene blir i dette tilfelle:

Korrektorformel (idet alle indeks adderes med 1):

$$\vec{\hat{u}}_{n+1} = 2\cos Q \cdot \vec{\hat{u}}_n - \vec{\hat{u}}_{n-1} + \beta_0^* (h^2 \vec{\hat{\phi}}_{n+1} + Q^2 \vec{\hat{u}}_{n+1}) + \sum_{j=1}^4 \beta_j^* (h^2 \vec{\hat{\phi}}_{n+1-j} + Q^2 \vec{\hat{u}}_{n+1-j}) \quad (2.125)$$

hvor

$$\vec{\hat{\phi}}_{n+1} = f(t_{n+1}, \vec{\hat{u}}_{n+1}) \quad (2.126)$$

$$\vec{\hat{\phi}}_1(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (Q^4 + \frac{5}{3}Q^2 - 4I)T_1(\frac{1}{2}) - (Q^2 + 3I)T_2(\frac{1}{2}) - \frac{13}{32}Q^4 + \frac{3}{2}Q^2 \} \quad (2.134)$$

$$\vec{\hat{\phi}}_3(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (-\frac{5}{2}Q^4 + 6I)T_1(\frac{1}{2}) + (Q^2 + 11)T_2(\frac{1}{2}) - \frac{3}{64}Q^4 - \frac{9}{4}Q^2 \} \quad (2.135)$$

$$\vec{\hat{\phi}}_3(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (Q^4 + 4I)T_1(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2}) + \frac{7}{32}Q^4 + \frac{3}{2}Q^2 \} \quad (2.136)$$

$$\vec{\hat{\phi}}_4(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (\frac{1}{12}Q^2 + I)T_1(\frac{1}{2}) - \frac{5}{128}Q^4 - \frac{1}{8}Q^2 \} \quad (2.137)$$

Interpolasjonskoeffisienter for PERDIAG ($v=1$):

$$\beta_0(r) = Q^{-6} \{ (-\frac{11}{6}Q^2 + I)T_1 + T_2 + (-\frac{r}{4})Q^4 - (-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} \beta_1(r) &= Q^{-6} \{ (Q^4 + \frac{5}{3}Q^2 - 4I)T_1 - (Q^2 + 3I)T_2 \\ &\quad + ((-\frac{r}{2}) - (-\frac{r}{3}) - 4(-\frac{r}{4}))Q^4 + 4(-\frac{r}{2})Q^2 \} \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$\begin{aligned} \beta_2(r) &= Q^{-6} \{ (-\frac{1}{2}Q^2 + 6I)T_1 + (Q^2 + 3I)T_2 \\ &\quad + (-2(-\frac{r}{2}) + 3(-\frac{r}{3}) + 6(-\frac{r}{4}))Q^4 - 6(-\frac{r}{2})Q^2 \} \end{aligned} \quad (2.129)$$

$$\begin{aligned} \beta_3(r) &= Q^{-6} \{ -(\frac{1}{3}Q^2 + 4I)T_1 - T_2 + (\frac{3}{128}Q^4 + \frac{1}{8}Q^2) \\ &\quad + ((-\frac{r}{2}) - 3(-\frac{r}{3}) - 4(-\frac{r}{4}))Q^4 + 4(-\frac{r}{2})Q^2 \} \end{aligned} \quad (2.130)$$

Her er:

$$\beta_4(r) = Q^{-6} \{ (\frac{1}{12}Q^2 + I)T_1 + ((-\frac{r}{3}) + (-\frac{r}{4}))Q^4 - (-\frac{r}{2})Q^2 \} \quad (2.131)$$

Interpolasjonsformelen kan da uttrykkes således:

$$\vec{u}_{n-1+r} = (\sin Q)^{-1} (\sin(Q(r+1)) \vec{u}_{n-1} - \sin(Qr) \vec{u}_{n-2}) \quad (2.145)$$

$$+ \sum_{j=0}^4 \beta_j(r) (h^2 \vec{u}_{n-j} + Q^2 \vec{u}_{n-j}) \quad (2.146)$$

Når metoden skal anvendes i praksis er det ønskelig å kunne halvere og doble skrittstengden. Ved halvering må $u_{n-\frac{1}{2}}$ og $u_{n-\frac{3}{2}}$ beregnes (henholdsvis $r=\frac{1}{2}$ og $r=-\frac{1}{2}$). (PERDIAG)

Koeffisientene blir i dette tilfelle:

$$r = \frac{1}{2}:$$

$$\beta_0(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (-\frac{11}{12}Q^2 + I)T_1(\frac{1}{2}) + T_2(\frac{1}{2}) + \frac{35}{128}Q^4 - \frac{3}{8}Q^2 \} \quad (2.133)$$

$$\beta_1(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (Q^4 + \frac{5}{3}Q^2 - 4I)T_1(\frac{1}{2}) - (Q^2 + 3I)T_2(\frac{1}{2}) - \frac{13}{32}Q^4 + \frac{3}{2}Q^2 \} \quad (2.134)$$

$$\beta_2(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (-\frac{1}{2}Q^2 + 6I)T_1(\frac{1}{2}) + (Q^2 + 3I)T_2(\frac{1}{2}) - \frac{3}{64}Q^4 - \frac{9}{4}Q^2 \} \quad (2.135)$$

$$\beta_3(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (-\frac{1}{3}Q^2 + 4I)T_1(\frac{1}{2}) - T_2(\frac{1}{2}) + \frac{7}{32}Q^4 + \frac{3}{2}Q^2 \} \quad (2.136)$$

$$\beta_4(\frac{1}{2}) = Q^{-6} \{ (\frac{1}{12}Q^2 + I)T_1(\frac{1}{2}) - \frac{5}{128}Q^4 - \frac{3}{8}Q^2 \} \quad (2.137)$$

$r = -\frac{1}{2}$: klasseiske Størmer- og Cowelikoeffisienter.

$$\text{Fra (2.81)} \quad \beta_0(-\frac{1}{2}) = Q^{-6} \left\{ \left(-\frac{11}{12}Q^2 + I \right) T_1(-\frac{1}{2}) + T_2(-\frac{1}{2}) - \frac{5}{128}Q^4 + \frac{1}{8}Q^2 \right\} \quad (2.138)$$

$$\beta_1(-\frac{1}{2}) = Q^{-6} \left\{ (Q^4 + \frac{5}{4}Q^2 - 4I) T_1(-\frac{1}{2}) - (Q^2 + 3I) T_2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{32}Q^4 - \frac{1}{2}Q^2 \right\} \quad (2.139)$$

$$\beta_2(-\frac{1}{2}) = Q^{-6} \left\{ \left(-\frac{1}{2}Q^2 + 6I \right) T_1(-\frac{1}{2}) + (Q^2 + 3I) T_2(-\frac{1}{2}) + \frac{13}{64}Q^4 + \frac{3}{4}Q^2 \right\} \quad (2.140)$$

$$\text{Selv re} \quad \beta_3(-\frac{1}{2}) = Q^{-6} \left\{ \left(-\frac{1}{3}Q^2 + 4I \right) T_1(-\frac{1}{2}) - T_2(-\frac{1}{2}) - \frac{5}{32}Q^4 - \frac{1}{2}Q^2 \right\} \quad (2.141)$$

$$\beta_4(-\frac{1}{2}) = Q^{-6} \left\{ \left(\frac{1}{12}Q^2 + I \right) T_1(-\frac{1}{2}) + \frac{3}{128}Q^4 + \frac{1}{8}Q^2 \right\} \quad (2.142)$$

Hør er:

$$T_1(\frac{1}{2}) = (I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(\frac{1}{2}Q) + I - \cos(\frac{1}{2}Q) \quad (2.143)$$

$$T_2(\frac{1}{2}) = ((\sin Q)^{-1} \sin(\frac{1}{2}Q) - \frac{1}{2}I) Q^2 \quad (2.144)$$

$$T_1(-\frac{1}{2}) = -(I - \cos Q) (\sin Q)^{-1} \sin(\frac{1}{2}Q) + I - \cos(\frac{1}{2}Q) \quad (2.145)$$

$$\text{Fra (2.132)} \quad T_2(-\frac{1}{2}) = -((\sin Q)^{-1} \sin(\frac{1}{2}Q) - \frac{1}{2}I) Q^2 = -T_2(\frac{1}{2}) \quad (2.146)$$

En har da fra (2.132):

$$\vec{u}_{n-\frac{1}{2}} = (\sin Q)^{-1} (\sin(\frac{3}{2}Q) \vec{u}_{n-1} - \sin(\frac{1}{2}Q) \vec{u}_{n-2}) + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j(\frac{1}{2}) \vec{G}_{n-j} \quad (2.147)$$

$$\vec{u}_{n-\frac{3}{2}} = (\sin Q)^{-1} \sin(\frac{1}{2}Q) (\vec{u}_{n-1} + \vec{u}_{n-2}) + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j(-\frac{1}{2}) \vec{G}_{n-j} \quad (2.148)$$

(2.155b) og (2.156b) stemmer med henholdsvis (2.150) og (2.151).

Rekursionsformelen kan da enklast uttrykkes (skalart):

$$s_0(v) = 1 \quad (2.157)$$

$$s_j(v) = 1 - v = \sum_{i=0}^{j-1} s_{j+2-i} s_i(v), \quad j \geq 1$$

(2.157) gir koeffisientene i de klassiske Størmer ($v=0$) og Cowellmetoder ($v=1$). (Jfr. Lemma 3.2)

De klassiske Størmer- og Cowellkoeffisienter.

Fra (2.81) fås som spesialtilfellet $Q=0$ og $r=1$:

$$\sigma_0 = I \quad (2.149)$$

$$\sigma_1 = -vI \quad (2.150)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{12}I \quad (2.151)$$

Selv rekursjonsformelen fås fra (2.79):

$$\sum_{j=0}^{k-2} S_{k-j} \sigma_j = (-1)^k ((-1)^k + (-1)^{k-1} v) I, \quad k \geq 3 \quad (2.152)$$

eller

$$S_2 \sigma_{k-2} = (1-v) I - \sum_{j=0}^{k-3} S_{k-j} \sigma_j, \quad k \geq 3 \quad (2.153)$$

Med $S_2 = 1$ og $i = k-2$ forenkles dette til

$$\sigma_i = (1-v) I - \sum_{j=0}^{i-1} S_{i+2-j} \sigma_j, \quad i \geq 1 \quad (2.154)$$

Fra (2.149) og (2.154) følger nå:

$$\sigma_1 = (1-v) I - S_3 \sigma_0 \quad (2.155a)$$

$$= -vI \quad (2.155b)$$

$$\sigma_2 = (1-v) I - S_4 \sigma_0 - S_3 \sigma_1 \quad (2.156a)$$

$$= \frac{1}{12}I \quad (2.156b)$$

(2.155b) og (2.156b) stemmer med henholdsvis (2.150) og (2.151)

Rekursjonsformelen kan da enklest uttrykkes (skalart):

$$\sigma_0(v) = 1 \quad (2.157)$$

$$\sigma_j(v) = 1-v - \sum_{i=0}^{j-1} S_{j+2-i} \sigma_i(v), \quad j \geq 1$$

(2.157) gir koeffisientene i de klassiske Størmer ($v=0$) og Cowellmetoder ($v=1$). (Jfr. Lemma 3.2)

Tabell 2.2. Koeffisientene i Størmers og Cowells metoder.

Betraktes til tidsopfolgen i den generelle metode. Fra (2.49, 50):

k	σ_k (Størmer)	σ_k^* (Cowell)
0	1	1
1	0	$-(\tau Q \sin Q)^{-1} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)) \sin(Qr)$
2	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12} + (\frac{r+1}{k+1}) \cdot \mathcal{M}^{(k+1)}(v(-\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r})) \int ds$
3	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{19}{240}$	$-\frac{1}{240} + (\tau Q \sin Q)^{-1} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)) \sin(Qr)$
5	$\frac{3}{40}$	$-\frac{1}{240}$
6	$\frac{863}{12096}$	$-\frac{221}{60480}$
7	$\frac{275}{4032}$	$-\frac{19}{6048}$
8	$\frac{33953}{518400}$	$-\frac{9829}{3628800}$
9	$\frac{8183}{129600}$	$-\frac{407}{172800}$
10	$\frac{3250433}{53222400}$	$-\frac{330157}{159667200}$

$$(2.158)$$

$$+(\tau Q \sin Q)^{-1} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)) \sin(Qr) \quad (2.159)$$

$$+(\frac{r+1}{k+1}) \cdot \mathcal{M}^{(k+1)}(v(-\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r})) \int ds \|_{\infty}$$

$$\leq h^{k+3} \int_{-v}^{r-v} |\mathcal{M}(\tau Q^{-1} \sin(Q(r-v-s)))| \cdot |\mathcal{M}((\frac{-s}{k+1}))| \cdot |\mathcal{M}^{(k+1)}(v(-\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r}))| \quad (2.160)$$

$$+ |\mathcal{M}((\tau Q \sin Q)^{-1} \sin(Qr))| \cdot |\mathcal{M}(\tau Q^{-1} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)))|$$

$$+ |\mathcal{M}((\frac{r+1}{k+1}) \cdot \mathcal{M}^{(k+1)}(v(-\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r})))| \int ds$$

Forutsetter $r \in \{0, 1\}$. En har da:

$$|\mathcal{M}(\tau Q^{-1} \sin(Q(r-v-s)))| \leq M((r-v-s)) \leq s \quad (2.161)$$

$$|\mathcal{M}((\frac{-s}{k+1}))| = |(\frac{-1}{k+1})| = 1 \quad (2.162)$$

$$|\mathcal{M}(\mathcal{G}^{(k+1)}(v(s)))| \text{ forutsettes endelig. } (\approx |\mathcal{G}^{(k+1)}|_{\max}) \quad (2.163)$$

Metodens lokale trunkeringsfeil.

Betrakter så trunkeringsfeilen i den generelle metode. Fra (2.49, 50):

$$\vec{R}_k = (-1)^{k+1} h^{k+2} A^{-1} \int_{-v}^{r-v} \{ \sin(Q(r-v-s)) \cdot \binom{-s}{k+1} \vec{G}^{(k+1)}(\eta(s)) \\ + (rsinQ)^{-1} \sin\left(\frac{Q}{r}(r-v-s)\right) \sin(Qr) \} ds \quad (2.158)$$

$$+ \left(\frac{r+1}{r} v + \frac{s}{r} \right) \cdot \binom{-s}{k+1} \vec{G}^{(k+1)}\left(\eta\left(-\frac{r+1}{r} v - \frac{s}{r}\right)\right) ds \quad (2.157)$$

$$+ \left(\frac{r+1}{r} v + \frac{s}{r} \right) \cdot \binom{-s}{k+1} \vec{G}^{(k+1)}\left(\eta\left(-\frac{r+1}{r} v - \frac{s}{r}\right)\right) ds \quad (2.158)$$

Siden $\sin(Q(r-v-s))$, $\sin Q$, $\sin\left(\frac{Q}{r}(r-v-s)\right)$ og $\sin(Qr)$ avhenger av den ukjente Q , er det ikke mulig å anvende middelverdisetningen på integralet. Derimot kan en beregne en skranke for $\|\vec{R}_k\|_\infty$.

Definerer operatoren M :

$$\text{når } s' = M(\cdot) \equiv \max_{s \in [-v, r-v]} \|\cdot\|_\infty \quad (2.159)$$

En har da fra (2.158):

$$\|\vec{R}_k\|_\infty = h^{k+3} \left\| \int_{-v}^{r-v} \{ Q^{-1} \sin(Q(r-v-s)) \binom{-s}{k+1} \vec{G}^{(k+1)}(\eta(s)) \right. \\ \left. + (rQ\sin Q)^{-1} \sin\left(\frac{Q}{r}(r-v-s)\right) \sin(Qr) \right. \\ \left. + \left(\frac{r+1}{r} v + \frac{s}{r} \right) \binom{-s}{k+1} \vec{G}^{(k+1)}\left(\eta\left(-\frac{r+1}{r} v - \frac{s}{r}\right)\right) \right\} ds \right\|_\infty \quad (2.160)$$

Altså:

$$\|\vec{R}_k\|_\infty \leq h^{k+3} \left\| \int_{-v}^{r-v} \{ M(Q^{-1} \sin(Q(r-v-s))) \cdot M\left(\binom{-s}{k+1}\right) \cdot M(\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))) \right. \\ \left. + M((rQ\sin Q)^{-1} \sin(Qr)) \cdot M(Q^{-1} \sin\left(\frac{Q}{r}(r-v-s)\right)) \right. \\ \left. + M\left(\left(\frac{r+1}{r} v + \frac{s}{r}\right) \binom{-s}{k+1}\right) \cdot M(\vec{G}^{(k+1)}\left(\eta\left(-\frac{r+1}{r} v - \frac{s}{r}\right)\right)) \right\} ds \right\|_\infty \quad (2.161)$$

$$\text{når } r \in [0, 1] \text{ og } Q \in \mathbb{R} \text{ endelig.} \quad (2.161)$$

$$+ M((rQ\sin Q)^{-1} \sin(Qr)) \cdot M(Q^{-1} \sin\left(\frac{Q}{r}(r-v-s)\right)) \\ + M\left(\left(\frac{r+1}{r} v + \frac{s}{r}\right) \binom{-s}{k+1}\right) \cdot M(\vec{G}^{(k+1)}\left(\eta\left(-\frac{r+1}{r} v - \frac{s}{r}\right)\right)) ds \quad (2.161)$$

Forutsetter $r \in [0, 1]$. En har da:

$$M(Q^{-1} \sin(Q(r-v-s))) \leq M((r-v-s)I) \leq r \quad (2.162)$$

$$M\left(\binom{-s}{k+1}\right) = \left| \binom{-1}{k+1} \right| = 1 \quad (2.163)$$

$$M(\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))) \text{ forutsettes endelig.} (\leq \|G^{(k+1)}\|_\infty) \quad (2.164)$$

$$r(\sin Q)^{-1} \sin(Qr) = (rQ)^{-1} \sin(Qr) \cdot (\sin Q)^{-1} Q \quad (2.165)$$

Herav: Definisjon 2.1. Gitt en numerisk metode for løsning av et ordinært startverdiproblem. Hvis denne metoden anvendes på problemer hvor eksakte $M((rsinQ)^{-1} \sin(Qr)) \leq ||(\sin Q)^{-1} Q|| \leq \frac{\pi}{2}$ når $||Q||_{\infty} \leq \frac{\pi}{2}$ algebraisk orden k i sørmen den gir eksakt løsning (fortsett fra (2.166) fordi spektralradien for matriser er høyst lik normen til matrisen svarende til en vilkårlig l_p -norm for tilhørende vektorer.

Definisjon 2.1. $M(Q^{-1} \sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))) \leq M(1 - \frac{v+s}{r}) \leq 1$ i løsning av et ordinært startverdiproblem. Hvis denne metoden anvendes på et problem hvor eksakte $M(\frac{r+1}{k+1} v + \frac{s}{r}) \leq \max(1, (\frac{2}{k+1})) \leq 2$ række, så sies metoden å ha eksakt av trigonometrisk orden k med parameter v i sørmen den gir eksakt løsning (2.167)

fordi $\frac{r+1}{k+1} v + \frac{s}{r} \in [1, 2]$. Løsningen girrer eksakt når løsningen tilhører \mathbb{R} (det) hvor v er den frie variablen, men ikke eksakt løsning når

Løsning $M(\vec{G}^{(k+1)}(-\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r}))$ forutsettes begrenset ($\leq \max ||\vec{G}^{(k+1)}||_{\infty}$) (2.168)

når $s' = -\frac{r+1}{r}v - \frac{s}{r}$ er begrenset og i dette tilfelle er s' begrenset: $s' \in [-2, -1]$.

En har da: når $A^2 \neq 0$ og $\vec{y}' = f_1(Ax) + p_1(x)$ når $A^2 \neq 0$. Det betyr at

-Størmers og Cowells metoder er av algebraisk orden $k+2$, mens de trigonometriske er av trigonometrisk orden $k+3$ når A^2 er konstant (2.169)

Altså: Vi ser også at trunceringstilfan er $O(h^{k+3})$.

$$||\vec{R}_k||_{\infty} \leq (r+\pi)r \max ||\vec{G}^{(k+1)}||_{\infty} h^{k+3} \quad (2.170)$$

$$\text{hvor } \max ||\vec{G}^{(k+1)}||_{\infty} = \max_{x \in [-2, 1]} ||\vec{G}^{(k+1)}(n(x))||_{\infty}$$

$$\text{når } r \in [0, 1] \text{ og } ||Q||_{\infty} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Definisjon 2.1. Gitt en numerisk metode for løsning av et ordinært startverdiproblem. Hvis denne metoden anvendes på problemer hvis eksakte løsning er et polynom så sies metoden å være av algebraisk orden k dersom den gir eksakt løsning (bortsett fra avrundingsfeil) når løsningen tilhører $p_k(t)$, men ikke eksakt løsning når løsningen er et $(k+1)$ -gradspolynom.

arbeider ut fra at av min vellede universitetslektor Syvert P. Nørsett.

Definisjon 2.2. Gitt en numerisk metode for løsning av et ordinært startverdiproblem. Hvis denne metoden anvendes på et problem hvis eksakte løsning er en trunkert Fourierrekke, så sies metoden å være av trigonometrisk orden k med parameter ω dersom den gir eksakt løsning (når alle beregninger gjøres eksakt) når løsningen tilhører $F_k(\omega t)$ hvor t er den frie variable, men ikke eksakt løsning når løsningen utspenner hele $F_{k+1}(\omega t)$. (3.1)

Vi ser av (2.171) at $\|\vec{R}_k\| \leq \|\vec{G}_{\text{maks}}^{(k+1)}\|$. Det betyr at metoden integrerer eksakt hvis $\vec{G} \in \vec{p}_k$. Siden $\vec{G} = \vec{y}'' + A^2 \vec{y}$ følger da at $\vec{y} \in \vec{p}_{k+2}$ når $A^2 = 0$ og $\vec{y} \in \vec{F}_1(At) \oplus \vec{p}_k(t)$ når $A^2 \neq 0$. Det betyr at Størmers og Cowells metoder er av algebraisk orden $k+2$, mens de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder er av algebraisk orden k og trigonometrisk orden 1 når A^2 er konstant. Vi ser også at trunneringsfeilen er $O(h^{k+3})$.

$$\epsilon_0 = 2q^{-2}(1-\cos q) \quad (3.3a)$$

$$\epsilon_1 = 0 \quad (3.3b)$$

(2.81d) kan utvides til å gjelde $j=2$ i det spesielt tilfellet.

(Bruker m for j):

$$\epsilon_m = q^{-2} \left(1 - \sum_{i=0}^{m-2} s_{m-i} \epsilon_i(q) \right) \quad (3.3c)$$

$\{s_i\}_1$ er gitte konstanter (tabell 2.1).

3. NOEN SETNINGER OM DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

$$\sigma_0(q) = 2q^{-2}(1-\cos q) \Rightarrow R_0(q^2) = 2, I_0(q^2) = -2, a_0 = 2^{-\alpha} \text{ (3.4)}$$

I dette kapittelet presenteres visse setninger med bevis som gjelder for koeffisientene til og orden av de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder. Resultatene er hentet fra arbeider utført av min veileder universitetslektor Syvert P. Nørsett. Disse foreligger til nå som kladd.

For enkelthets skyld regnes skalart ($Q = q$ (1x1 matrise)).

Lemma 3.1. Det fins polynomer $R_m(q^2)$ og $I_m(q^2)$, $m \geq 0$, av grad = 1 slik at:

$$\sigma_m(q) = q^{-\alpha_m} (R_m(q^2) + \cos(q) \cdot I_m(q^2)) \quad (3.1)$$

Vi ser at lemma 3.1 er riktig for $m=0, 1, 2, 3, 4$.
hvor at $\frac{R_m(0)}{I_m(0)} = -1$ er riktig for alle $m \geq 1$, $m \neq 2$.

Av (3.1) og (*) og (3.2) følger at $\sigma_n(q) = \sum_{i=0}^{n-2} s_{n-i} q^{n-2-i} (R_i(q^2) + \cos q \cdot I_i(q^2))$

Bevis: Fra (2.81) følger med $r=1$ og $v=0$:

hvor

$$\sigma_0 = 2q^{-2}(1-\cos q) = \sum_{j=0}^{n-2} s_{n-1-j} q^{n-2-j} R_j(q^2) \quad (3.3a)$$

og

$$\sigma_1 = 0 = - \sum_{i=0}^{n-3} s_{n-1-i} q^{n-2-i} I_i(q^2) \quad (3.3b)$$

(2.81d) kan utvides til å gjelde $j=2$ i dette spesialtilfellet.

(Bruker m for j):

Setter $n = 2k$, kan
 $\sigma_m = q^{-2} (1 - \sum_{i=0}^{m-2} s_{m-i} \sigma_i(q))$, $m \geq 2$

$\{s_i\}_i$ er gitte konstanter (tabell 2.1).

$$I_{2k}(0) = - \left(\sum_{i=0}^{2k-2} s_{2k-1-i} q^{2k-2-i} I_i(q^2) + s_{2k} q^{2k-2} I_{2k-2}(q^2) \right) \Big|_{q=0} \quad (3.14a)$$

$$= -I_{2k-2}(0) \quad (3.14b)$$

- følger fra (3.2) og (*) følger:

$$1 < 2k-2 \Rightarrow a_i < a_{2k-2} \Rightarrow a_{2k-2-\alpha_i} > 0 \quad (3.15a, b, c)$$

Spesielt har en (2.86-90) :

$$\sigma_0(q) = 2q^{-2}(1-\cos q) \Rightarrow R_0(q^2) = 2, I_0(q^2) = -2, \sigma_0 = 2 \quad (3.4)$$

$$\sigma_1(q) = 0 \Rightarrow R_1(q^2) = 0, I_1(q^2) = 0, (\sigma_1 = 2) \quad (3.5)$$

$$\sigma_2(q) = 2q^{-4}(\frac{1}{2}q^2 - 1 + \cos q) \Rightarrow R_2(q^2) = q^2 - 2, I_2(q^2) = 2, \sigma_2 = 4 \quad (3.6)$$

$$\sigma_3(q) = ? \Rightarrow R_3(q^2) = q^2 - 2, I_3(q^2) = 2, \sigma_3 = 4 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_4(q) &= q^{-6}(q^4 - \frac{17}{6}q^2 + 2 + \cos q(\frac{11}{6}q^2 - 2)) \\ &\Rightarrow R_4(q^2) = q^4 - \frac{17}{6}q^2 + 2, I_4(q^4) = \frac{11}{6}q^2 - 2, \sigma_4 = 6 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Vi ser at Lemma 3.1 er riktig for $m=0,1,2,3,4$.

Anta at Lemma 3.1 er riktig for $0 \leq m \leq n-1, n \geq 2$. (*)

Av (3.1) og (3.3) fås da:

$$\sigma_n(q) = q^{-2}(1 - \sum_{i=0}^{n-2} s_{n-i} q^{-\alpha_i} (R_i(q^2) + \cos q \cdot I_i(q^2))) \quad (3.9)$$

$$= q^{-(\alpha_{n-2}+2)} (R_n(q^2) + \cos q \cdot I_n(q^2)) \quad (3.10)$$

Herav

$$R_n(q^2) = q^{\alpha_{n-2}} - \sum_{j=0}^{n-2} s_{n-j} q^{\alpha_{n-2}-\alpha_j} R_j(q^2) \quad (3.11)$$

og

$$I_n(q^2) = - \sum_{i=0}^{n-2} s_{n-i} q^{\alpha_{n-2}-\alpha_i} I_i(q^2) \quad (3.12)$$

$R_n(q^2)$ og $I_n(q^2)$ er polynomer fordi $\alpha_{n-2} \geq \alpha_i, i=0(1)n-2$.

Herav følger umiddelbart at (3.2) gjelder for $m=n$.

Setter $n = 2k, k \in \mathbb{N}$:

$$I_{2k}(q^2) = - \sum_{i=0}^{2k-2} s_{2k-1} q^{\alpha_{2k-2}-\alpha_i} I_i(q^2) \quad (3.13)$$

$$I_{2k}(0) = - \left(\sum_{i=0}^{2k-3} s_{2k-1} q^{\alpha_{2k-2}-\alpha_i} I_i(q^2) + s_2 q^0 I_{2k-2}(q^2) \right) \Big|_{q=0} \quad (3.14a)$$

Vi har dermed $v = -I_{2k-2}(0)$ gjelder for $m = n$.

Lemma 3.1 følger da ved induksjon.

Q.E.D.

fordi fra (3.2) og (*) følger:

$$i < 2k-2 \Rightarrow \alpha_i < \alpha_{2k-2} \Rightarrow \alpha_{2k-2}-\alpha_i > 0 \quad (3.15a,b,c)$$

Tilsvarende har en :

$$i \stackrel{q+0}{\leq} 2k-3 \Rightarrow i < 2k-1 \Rightarrow {}^{\alpha}2k-1-i > 0 \quad (3.17a,b,c)$$

Det gir da med $n = 2k+1$:

Da følger:

$$I_{2k+1}(0) = - \sum_{i=0}^{2k-1} S_{2k+1-i} q^{\alpha 2k-i-\alpha} i I_i(q^2) \Big|_{q=0} \quad (3.19a)$$

$$= - \left(\sum_{i=0}^{2k-3} S_{2k+1-i} q^{\alpha 2k-1-i} \cdot i \cdot I_i(q^2) \right) \Big|_{q=0} \quad (3.19b)$$

Bevist: Fra integrasjonen (3.19b) med $s=1$ og $v=0$:

$$\sigma_m(q) = - (I_{2k-2}(0) + I_{2k-1}(0)) \quad (3.19c)$$

Tilsvarende fås for $R_n(q^2)$:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \sigma_m(q) = (-1)^m \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(1-s))}{\pi} (1-s) \left(\left(\frac{-s}{m} \right) + \left(\frac{s}{m} \right) \right) ds \quad (3.27)$$

$$R_{2k}(0) = -R_{2k-2}(0) \quad (3.20)$$

$$R_{2k+1}(0) = - (R_{2k-2}(0) + R_{2k-1}(0)) \quad (3.21)$$

Herav:

$$\frac{R_{2k}(0)}{I_{2k}(0)} = \frac{R_{2k-2}(0)}{I_{2k-2}(0)} = -1 \quad (3.22)$$

Siste likhet følger fra induksjonshypotesen (*). Videre:

$$\frac{R_{2k+1}(0)}{I_{2k+1}(0)} = \frac{R_{2k-2}(0) + R_{2k-1}(0)}{I_{2k-2}(0) + I_{2k-1}(0)} \quad (3.23a)$$

$$= \frac{-I_{2k-2}(0) - I_{2k-1}(0)}{I_{2k-2}(0) + I_{2k-1}(0)} = -1 \quad (3.23b)$$

En har dermed vist at (3.1) gjelder for $m = n$.

Lemma 3.1 følger da ved induksjon.

Q.E.D.

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2) \cdot q^{-\sigma_m} (-s_m q^{\sigma_m+2}) + O(q^{\sigma_m+3}) \quad (3.32)$$

eller

Lemma 3.2. For $m \geq 0$ gjelder:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \sigma_m(q) = \sigma_m(0) = \sigma_m \quad (3.24)$$

hvor σ_m er de vanlige Størmerkoeffisientene.

Da følger:

$$-\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} = \cos q - \frac{\sigma_m}{I_m(0)} q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \quad (3.25)$$

Bevis: Fra integralrepresentasjonen av $\sigma_m(q)$ ((2.51) med $r=1$ og $v=0$):

$$\sigma_m(q) = (-1)^m q^{-1} \int_0^1 \sin(q(1-s)) \left\{ \left(-\frac{s}{m}\right) + \left(\frac{s}{m}\right) \right\} ds \quad (3.26)$$

Herav:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \sigma_m(q) = (-1)^m \int_0^1 \lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(q(1-s))}{q(1-s)} \right) (1-s) \left\{ \left(-\frac{s}{m}\right) + \left(\frac{s}{m}\right) \right\} ds \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^m \int_0^1 (1-s) \left\{ \left(-\frac{s}{m}\right) + \left(\frac{s}{m}\right) \right\} ds \\ &= \sigma_m \end{aligned} \quad |1, side 291| \quad (3.28)$$

(3.24) er bevist.

Fra Lemma 3.1:

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2) \cdot q^{-\alpha_m} \left\{ -\left(-\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)}\right) + \cos q \right\} \quad (3.29)$$

Fra (3.24):

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2) \left\{ -\kappa_m + O(q^2) \right\} \quad (3.30)$$

der

$$\kappa_m = -\frac{\sigma_m}{I_m(0)} \quad (3.31)$$

Altså:

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2) \cdot q^{-\alpha_m} \left\{ -\kappa_m q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \right\} \quad (3.32)$$

eller

det vil $\cos q + \frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} = -\kappa_m q^m + O(q^{m+2})$ 1. orden. Bruker nå samme teknikk som i beviset av (3.25) i Lemma 3.2:

Herav:

$$-\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} = \cos q - \frac{m}{I_m(0)} q^m + O(q^{m+2}) \quad (3.34)$$

Fra (3.39)

(3.25) er bevist.

Q.E.D.

Teorem 3.1. La $\alpha_m(q)$ være koeffisienter gitt ved

$$\text{eller } \sigma \alpha_m(q) \equiv q^{-m} (R_m(q^2) + I_m(q^2) \cdot C(q)) \quad (3.35)$$

det vil si de koeffisienter en får ved å erstatte $\cos q$ i $\sigma_m(q)$ med approksimasjonen $C(q)$ som er en polynomisk eller rasjonal funksjon av q . Hvis $C(q)$ innsettes i den trigonometrisk tilpassete Størmermetoden fås:

$$u_{n+1} - 2C(q)u_n + u_{n-1} = h^2 \sum_{m=0}^k \sigma \alpha_m(q) \nabla^m (\phi_n + A^2 u_n) \quad (3.36)$$

Med $C(q) = \cos q$ er metodens trunkeringsfeil $O(h^{k+3})$ uansett q .

Et nødvendig og tilstrekkelig vilkår for at trunkeringsfeilen i (3.36) er $O(h^{k+3})$ for alle q er at:

$$C(q) = \cos q + O(q^{k+2}) \quad (3.37)$$

hvor α_k refererer til Lemma 3.1.

Dette skal gjelde for alle $m=0(1)k$.

Det vil si at:

$$\nabla^m z(x_n) = O(h^m) \quad (3.38)$$

I (3.36) vil derfor perturbasjonen $\sigma \alpha_m(q) - \alpha_m(q)$ multipliseres med en faktor $O(h^{m+2})$ i trunkeringsfeilen. Siden trunkeringfeilen med eksakt $\cos(q)$ er $O(h^{k+3})$, kan perturbasjonen i $\sigma_m(q)$ være $O(h^{k+3-(m+2)}) = O(h^{k-m+1})$. En må minst ha:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \sigma \alpha_m(q) = \sigma_m(0) = \alpha_m \quad (3.39)$$

det vil si $\cos(q)$ -approksimasjon av minst 1. orden. Bruker nå samme teknikk som ved beviset av (3.25) i Lemma 3.2:

Altså:

$$\sigma a_m(q) = I_m(q^2) q^{-\alpha_m} \left\{ \frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} + C(q) \right\} \quad (3.40)$$

$$\sigma a_m(q) - a_m(q) = O(q^2) \quad (3.50)$$

Fra (3.39):

Fra innledningen av beviset følger at:

$$\sigma a_m(q) = I_m(q^2) \left\{ \kappa_m + O(q^2) \right\} \quad (3.41)$$

$$(3.51)$$

der

$$\kappa_m = - \frac{\sigma_m}{I_m(0)}$$

$$(3.42)$$

eller

$$\sigma a_m(q) = I_m(q^2) q^{-\alpha_m} \left\{ - \frac{\sigma_m}{I_m(0)} q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \right\} \quad (3.43)$$

$$(3.52)$$

Herav:

ii) k odd, m like

$$\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} + C(q) = \frac{\sigma_m}{I_m(0)} q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \quad (3.44)$$

$$(3.53)$$

eller

iii) k like, m odd

$$C(q) = - \frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} + \frac{\sigma_m}{I_m(0)} q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \quad (3.45)$$

$$(3.54)$$

Fra Lemma 3.2 (3.25) følger:

$$C(q) = \cos(q) + O(q^{\alpha_m+2}) \quad (3.46)$$

Dette skal gjelde for alle $m=0(1)k$. (3.37) også er tilstrekkelig.

O.E.D.

Det vil si at:

En kan analogt vise at Lemma 3.1 og 3.2 og Teorem 3.1

$$gjelder C(q) = \cos(q) + O(q^{\alpha_k+2}) \quad (3.47)$$

siden α_m øker monoton med m .

Vi har dermed vist at (3.37) er nødvendig for å beholde trunceringsfeil av $O(h^{k+3})$ for alle q . Anta så at (3.37) også er tilstrekkelig.

Da følger fra (3.35) og Lemma 3.2:

$$\sigma a_m(q) = q^{-\alpha_m} \left\{ R_m(q^2) + I_m(q^2) \cdot (\cos(q) + O(q^{\alpha_k+2})) \right\} \quad (3.48)$$

Sats 3.1. For $\sigma_j(q) = \sigma_m(q) + O(q^{\alpha_k - \alpha_m + 2})$ gjelder: (3.49)

Altså: $\sigma_0(Q, r, 1) = \sigma_0(Q, r, 0)$ (3.56a)

$$\sigma_m(q) - \sigma_m(q) = O(q^{\alpha_k - \alpha_m + 2}) \quad (3.50)$$

Fra innledningen av beviset følger at:

$$\alpha_k - \alpha_m + 2 \geq k-m+1 \quad (3.51)$$

for at dette skal være riktig. Bruker nå Lemma 3.1. (3.2):

i) k odd, m odd (3.58a)

$$\alpha_k - \alpha_m + 2 = k+l-m-1+2 = k-m+2 \geq k-m+1 \quad (3.52)$$

ii) k odd, m like (3.58c)

$$\alpha_k - \alpha_m + 2 = k+l-m-2+2 = k-m+1 \geq k-m+1 \quad (3.53)$$

Siden (3.58c) gjelder for alle p må (3.56) være oppfylt.

iii) k like, m odd Q.E.D.

$$\alpha_k - \alpha_m + 2 = k+2-m-1+2 = k-m+3 \geq k-m+1 \quad (3.54)$$

iv) k like, m like

$$\alpha_k - \alpha_m + 2 = k+2-m-2+2 = k-m+2 \geq k-m+1 \quad (3.55)$$

Herved følger at antakelsen om at (3.37) også er tilstrekkelig, er riktig. Q.E.D.

En kan analogt vise at Lemma 3.1 og 3.2 og Teorem 3.1 gjelder tilsvarende for den trigonometrisk tilpassete Cowellmetode.

Sats 3.1. For $\sigma_j(Q, r, v)$ gitt i (2.81) gjelder:

$$\sigma_0(Q, r, 1) = \sigma_0(Q, r, 0) \quad \text{oppfører seg stabilt} \quad (3.56a)$$

egenskaperne til Størmers og Cowells metoder som er på formen

$$\sigma_j(Q, r, 1) = \sigma_j(Q, r, 0) - \sigma_{j-1}(Q, r, 0) \quad , \quad j \geq 1 \quad (3.56b)$$

Beweis: Fra (2.65) har en at:

$$K(0, r, 1, \rho) \equiv (1-\rho) K(0, r, 0, \rho) \quad \text{for enkelhets skyld.} \quad (3.57)$$

Teorien er også sett innhet fra arbeider utdørt av Syvert P. Rønning.

Innsetting av definisjonen av den genererende funksjon $K(2.52)$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q, r, 1) \rho^j = (1-\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q, r, 0) \rho^j \quad (3.58a)$$

Defining $j=0$ in linear programming models for numerical training

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q, r, 0) \rho^j - \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q, r, 0) \rho^{j+1} \quad (3.58b)$$

$$= \sigma_0(Q, r, 0) + \sum_{j=1}^{\infty} (\sigma_j(Q, r, 0) - \sigma_{j-1}(Q, r, 0)) \rho^j \quad (3.58c)$$

Siden (3.58c) gjelder for alle ρ må (3.56) være oppfylt.

Q.E.D.

4. ABSOLUTT STABILITET AV STØRMERS OG COWELLS METODER.

Vi ønsker i dette kapittelet å undersøke stabilitets-
egenskapene til Størmers og Cowells metoder som er på formen

$$u_{n+1-v} - 2u_{n-v} + u_{n-1-v} = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j(v) v^j \phi_n \quad (4.1)$$

hvor $\sigma_j(v)$ er gitt ved (2.157). ($v=0$: Størmer, $v=1$: Cowell)

En vil her bruke skalare betegnelser for enkelthets skyld.

Teorien er stort sett hentet fra arbeider utført av Syvert P. Nørsett.

Først defineres noen sentrale begrepér:

Definisjon 4.1. En lineær k-skrittmetode for numerisk løsning
av $y'' = f(x, y)$ med initialverdier defineres ved to polynomer av
grad k (eller lavere for ett av polynomene) $\mu(s)$ og $\nu(s)$:

$$\mu(s) = \sum_{j=0}^k \alpha_j s^j, \quad \nu(s) = \sum_{j=0}^k \beta_j s^j \quad (4.5)$$

Metoden er da:

$$\mu(E)u_n = h^2 \nu(E)\phi_n \quad (4.2)$$

der E er forskyvningsoperatoren.

(Det er her underforstått at metoden krever en startmetode.)

Definisjon 4.2. Metoden (4.2) kalles absolutt stabil for $z^2 \in S$,

s åpen, $S \subset C$ hvis og bare hvis alle røttene r i

$$\mu(r) + z^2 \nu(r) = 0 \quad (4.3)$$

oppfyller $|r| < 1$, $\forall z^2 \in S$,

hvor $z = \lambda h$, λ testparameter.

Ellers kalles metoden absolutt ustabil.

Definisjon 4.3. Metoden (4.2) kalles banestabil for $z^2 \in B \subset C$

hvis og bare hvis alle røttene r i (4.3) er forskjellige og slik at
 $|r| = 1$, $\forall z^2 \in B$.

Definisjon 4.4. Metoden (4.2) sies å være L-stabil hvis og bare hvis alle røttene r i (4.3) oppfyller $\lim_{|z|^2 \rightarrow \infty} |r| = 0$.

Definisjon 4.5. Metoden (4.2) sies å være av orden p hvis og bare hvis for $y \in C^\infty([a, b])$:

$$\mu(E)y_n - h^2 v(E)f_n = c_{p+2} h^{p+2} y^{(p+2)}(x_n) + O(h^{p+3}) \quad (4.4)$$

(Denne definisjonen må ikke blandes sammen med definisjonen av algebraisk orden i kapittel 2.)

Vi vil i det følgende bevise noen setninger.

Lemma 4.1. For koeffisientene i Størmers (σ_m) og Cowells (σ_m^*) metoder gjelder:

$$0 < \sigma_{m+1} < \sigma_m, \quad m \geq 3 \quad (4.5)$$

$$\sigma_m^* < \sigma_{m+1}^*, \quad m \geq 5 \quad (4.6)$$

$$\sigma_m^* < 0, \quad m \geq 4 \quad (4.7)$$

Bevis: Fra (2.51) har en ($r=1, v=0, Q>0$):

$$\sigma_m = (-1)^m \int_0^1 (1-s) \left\{ \binom{-s}{m} + \binom{s}{m} \right\} ds \quad (4.8a)$$

$$= (-1)^m \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!} \left\{ (-s)(-s-1) \cdots (-s-m+1) + s(s-1) \cdots (s-m+1) \right\} ds \quad (4.8b)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!} \left\{ (1+s)(2+s) \cdots (m-1+s) - (1-s)(2-s) \cdots (m-1-s) \right\} ds \quad (4.8c)$$

Herav fås:

$$\sigma_m - \sigma_{m+1} = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!} \left\{ (m+1)(1+s)(2+s) \cdots (m-1+s) - (1+s)(2+s) \cdots (m-1+s)(m+s) \right\} ds \quad (4.9a)$$

Sett i (4.10) fås da:

$$+(1-s)(2-s) \cdots (m-1-s)(m-s) \\ -(m+1)(1-s)(2-s) \cdots (m-1-s) \} ds$$

$$\sigma_m = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!} \{ (m+1-m-s)(1+s)(s+s) \cdots (m-1+s) + (m-s-m-1)(1-s)(2-s) \cdots (m-1-s) \} ds \quad (4.9b)$$

Videre har en fra (4.8c), (4.16) og (4.19):

$$\sigma_m = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!} (1-s^2) \{ \psi(s) - \psi(-s) \} ds \quad (4.10)$$

$$\sigma_m = \int_0^1 (1-s) \{ (1+s)\psi(s) - (1+s)\psi(-s) \} ds \quad (4.21)$$

hvor

$$\psi(s) \equiv (2+s)(3+s) \cdots (m-1+s) \quad m \geq 3 \quad (4.11)$$

Men

$$\psi(s) - \psi(-s) = \int_{-s}^s \psi'(x) dx, \quad s \in [0, 1] \quad (4.12)$$

Fra regelen om derivasjon av produkt følger:

$$\text{Altså: } \psi'(x) = \frac{\psi(x)}{2+x} + \cdots + \frac{\psi(x)}{m-1+x} \quad (4.13)$$

$$= \psi(x) \cdot V(x) \quad (4.14)$$

hvor er beviset

$$V(x) \equiv \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k+x} \quad (4.15)$$

En har tilsvarende fra (2.51) med $x=1, v=1, \dots$

En har for $x \in [-1, 1]$:

$$\psi(x) \geq (m-2)! \quad (4.16)$$

$$= (-1)^m \int_0^1 (1-s) \left[\left(\frac{1-s}{m} \right) + \left(\frac{1+s}{m} \right) \right] ds \quad (4.26)$$

og

$$V(x) \geq \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!} ((1-s)(-s)(-s-1) \cdots (-s-m+2)) \quad (4.17)$$

Da er:

$$+ (1+s)(s-1) \cdots (m-m+2) ds$$

$$\psi'(x) \geq \frac{(m-2)!}{3}, \quad x \in [-1, 1] \cdots (m-2-s) \quad (4.18)$$

Det betyr at

$$+ (-s-1)(-s)(1-s)(2-s) \cdots (m-2-s) ds$$

$$\psi(s) - \psi(-s) \geq \frac{2(m-2)!}{3} s \quad (4.19)$$

Innsatt i (4.10) fås da:

$$\sigma_m - \sigma_{m+1} = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!} \frac{2(m-2)!}{3} s ds = \frac{1}{30(m+1)m(m-1)} > 0 \quad (4.20)$$

Videre har en fra (4.8c), (4.16) og (4.19):

$$\sigma_m = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!} \{ (1+s)\psi(s) - (1+s)\psi(-s) \} ds \quad (4.21)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!} \{ \psi(s) - \psi(-s) + s(\psi(s) + \psi(-s)) \} ds \quad (4.22)$$

$$\geq \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!} \left\{ \frac{2(m-2)!}{3} s + s(m-2)! \right\} ds \quad (4.23)$$

$$= \frac{2}{9m(m-1)} \left[(m+1)(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)\psi^*(-s) \right] ds \quad (4.24)$$

Altså:

$$\sigma_m \geq \frac{2}{9m(m-1)} > 0, \quad m \geq 3 \quad (4.30)$$

(4.5) er bevist.

En har tilsvarende fra (2.51) med $r=1, v=1, Q \rightarrow 0$:

$$\sigma_m^* = (-1)^m \int_{-1}^0 (-s) \left\{ \binom{-s}{m} + \binom{2+s}{m} \right\} ds \quad (4.25)$$

$$= (-1)^m \int_0^1 (1-s) \left\{ \binom{1-s}{m} + \binom{1+s}{m} \right\} ds \quad (4.26)$$

$$= (-1)^m \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!} \{ (1-s)(-s)(-s-1) \cdots (-s-m+2) \}$$

$$+ (1+s)s(s-1) \cdots (s-m+2) \} ds \quad (4.27a)$$

Analogt har en:

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!} \{ (s-1)s(1+s)(2+s) \cdots (m-2+s) \}$$

$$+ (-s-1)(-s)(1-s)(2-s) \cdots (m-2-s) \} ds \quad (4.27b)$$

Der er:

$$\psi^*(x) = \psi(x) \cdot V(x) \quad (4.33)$$

$$V(x) = \sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{k+x} \quad (4.34)$$

$$\sigma_{m+1}^* - \sigma_m^* = \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!} \{ (s-1)s(1+s)(2+s) \cdots (m-1+s)$$

$$-(m+1)(s-1)s(1+s) \cdots (m-2+s) \quad (4.25)$$

$$(4.28)$$

$$v^*(x) = \frac{1}{2} + (-1-s)(-s)(1-s)(2-s) \cdots (m-1-s) \quad (4.26)$$

$$-(m+1)(-1-s)(-s)(1-s) \cdots (m-2-s) \} ds \quad (4.27)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!} \{ [(s-1)s(1+s)(2+s)(m-1+s) - (m+1)(s-1)s(1+s)(2+s)] \psi^*(s)$$

$$+ [(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)(m-1-s) \quad (4.29)$$

$$(4.29)$$

Hänst i (4.31c):

$$\sigma_{m+1}^* - \sigma_m^* = \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!} \{ (-1-s)(-2+s)(-1+s)s(1+s)(2+s) \psi^*(-s) \} ds \quad (4.39)$$

Hvor

$$\psi^*(s) \equiv (3+s)(4+s) \cdots (m-2+s), m \geq 5 \quad (4.30)$$

Hära:

$$\sigma_{m+1}^* - \sigma_m^* = \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!} \{ [(s-1)s(1+s)(2+s)(m-1+s-m-1)] \psi^*(s) + [(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)(m-1-s-m-1)] \psi^*(-s) \} ds \quad (4.31a)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!} \{ (-2+s)(-1+s)s(1+s)(2+s) \psi^*(s) + (-2-s)(-1-s)(-s)(1-s)(2-s) \psi^*(-s) \} ds \quad (4.31b)$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)(-2+s)(-1+s)s(1+s)(2+s)}{(m+1)!} (\psi^*(s) - \psi^*(-s)) ds \quad (4.31c)$$

Analogt har en:

$$\psi^*(s) - \psi^*(-s) = \int_{-s}^s \psi'(x) dx \quad (4.32)$$

Här er:

$$\psi'(x) = \psi^*(x) \cdot v^*(x) \quad (4.33)$$

Hvor

$$v^*(x) \equiv \sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{(k+x)} \quad (4.34)$$

För $x \in [-1,1]$ har en:

Cowell's metoder:

$$\psi^*(x) \geq (m-1)! \quad (4.35)$$

$$v^*(x) \geq \frac{1}{2} \quad (4.36)$$

Altså:

$$\psi^*(x) \geq \frac{(m-1)!}{2}, \quad x \in [-1,1] \quad (4.37)$$

Det vil si:

$$\psi^*(s) - \psi^*(-s) \geq (m-1)!s \quad (4.38)$$

Innsatt i (4.31c):

$$\begin{aligned} \sigma_{m+1}^* - \sigma_m^* &= \int_0^1 \frac{(m-1)!}{(m+1)!} (1-s)(-2+s)(-1+s)s^2(1+s)(2+s) ds \\ &= \frac{47}{30(m+1)m}, \quad m \geq 5 \end{aligned} \quad (4.39)$$

Altså:

$$\sigma_{m+1}^* - \sigma_m^* \geq \frac{47}{30(m+1)m} > 0, \quad m \geq 5 \quad (4.40)$$

Harmed er (4.6) bevist.

Fra Satz 3.1 har en at:

$$\sigma_m^* = \sigma_m - \sigma_{m-1}^*, \quad m \geq 1$$

(4.5) gir da:

$$\sigma_m^* < 0, \quad m \geq 4$$

(4.7) er bevist.

Q.E.D.

4.1. Noen satser angående absolutt stabilitet av Størmers og Cowells metoder.

Fra 4.1. Anta at metoden (4.1) har orden $p=2m+1$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.
Fra definisjon 4.5 følger da med $y(t) = e^{i\lambda t}$:

$$\mu(e^{iz}) + z^2 v(e^{iz}) = C_{p+2} h^{p+2} (i\lambda)^{p+2} + C_{p+3} (hi\lambda)^{p+3} + O(h^{p+4}) \quad (4.40a)$$

$$= (-1)^m C_{p+3} z^{p+3} + i(-1)^{m+1} C_{p+2} z^{p+2} + O(z^{p+4}) \quad (4.40b)$$

hvor $z = h\lambda$.

La $r(z)$ være røttene til (4.3):

$$\mu(r(z)) + z^2 v(r(z)) = 0 \quad (4.40c)$$

tilsvarende dobbeltrøtter 1 for $z=0$.

Setter

$$r(z) \equiv e^{iz} + f(z) \quad (4.41)$$

$$f(z) = f_0(z) + if_1(z), \quad f(z) = O(z) \quad (f(0)=0) \quad (4.42)$$

Innsett i (4.40c):

$$\mu(e^{iz} + f) + z^2 v(e^{iz} + f) = 0 \quad (4.43)$$

Taylorutvikling:

$$\mu(e^{iz}) + f \cdot \mu'(e^{iz}) + O(f^2) + z^2 v(e^{iz}) + z^2 v'(e^{iz}) f + O(z^2 f^2) = 0 \quad (4.44)$$

Setter inn (4.40b) i (4.44) og ordner:

$$(\mu'(e^{iz}) + z^2 v'(e^{iz})) f + O(f^2)(1+z^2) = -(-1)^m C_{p+3} z^{p+3} \quad (4.45)$$

$$-i(-1)^{m+1} C_{p+2} z^{p+2} + O(z^{p+4}) \quad (4.46)$$

Berav ser en at:

$$f = O(z^{p+2}) \text{ eller lavere} \quad (4.46)$$

Må er:

$$\mu(e^{iz}) = \mu(1) + \mu'(1)(e^{iz} - 1) + \frac{1}{2}\mu''(1)(e^{iz} - 1)^2 + O(z^3) \quad (4.47)$$

Innsatt i (4.45):

Fra (4.1) fås at:

$$\mu(s) = (s^2 - 2s + 1)p_{k-1-v}(s) \quad (4.48)$$

Herav:

$$\mu(1) = \mu'(1) = 0 \quad (4.49)$$

Dette gjelder generelt for konsistente metoder for løsning av 2. ordens problemer. Innsatt i (4.47):

$$\mu(e^{iz}) = -\frac{z^2}{2}\mu''(1) + O(z^3) \quad (4.50)$$

Likledest har en at:

$$\mu'(e^{iz}) = \mu'(1) + (e^{iz} - 1)\mu''(1) + \frac{1}{2}(e^{iz} - 1)^2\mu'''(1) + O(z^3) \quad (4.51a)$$

$$= \mu''(1)zi - \frac{z^2}{2}(\mu''(1) + \mu'''(1)) + O(z^3) \quad (4.51b)$$

$$= a_0 zi + a_1 z^2 + O(z^3) \quad (4.51c)$$

der

$$a_0 \equiv \mu''(1), \quad a_1 \equiv -\frac{1}{2}(\mu''(1) + \mu'''(1)) \quad (4.52)$$

Før v har vi analogt:

$$v(e^{iz}) = v(1) + v'(1)(iz - \frac{z^2}{2} + O(z^3)) + \frac{1}{2}v''(1)(-z^2 + O(z^3)) + O(z^3) \quad (4.53a)$$

$$= \{v(1) - \frac{1}{2}z^2 v'(1) - \frac{1}{2}z^2 v''(1)\} + i\{v'(1)z\} + O(z^3) \quad (4.53b)$$

$$v'(e^{iz}) = v'(1) + v''(1)(iz - \frac{z^2}{2} + O(z^3)) + \frac{1}{2}v'''(1)(-z^2 + O(z^3)) + O(z^3) \quad (4.54a)$$

$$= \{v'(1) - \frac{1}{2}(v''(1) + v'''(1))z^2\} + v''(1)zi + O(z^3) \quad (4.54b)$$

$$= b_0 zi + \{v'(1) + b_1 z^2\} + O(z^3) \quad (4.54c)$$

$$\text{der } b_0 \equiv v''(1), \quad b_1 \equiv -\frac{1}{2}(v''(1) + v'''(1)) \quad (4.55)$$

Innsatt i (4.45):

$$\begin{aligned} & \text{Ved henholdsvis } z=0: \\ & (a_0 z + a_1 z^2 + z^2 v'(1))(f_0 + i f_1) + O(fz^3) + O(f^2)(1+z^2) \\ & \text{og innsatt } z=0 \text{ fås:} \\ & = (-1)^{m+1} C_{p+3} z^{p+3} + i(-1)^m C_{p+2} z^{p+2} + O(z^{p+4}) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ordnet:

$$\begin{aligned} & v''(1) = 6v'(1) - 6v(1) \\ & (a_1 + v'(1))f_0 z^2 - a_0 f_1 z + a_0 f_0 z + (a_1 + v'(1))f_1 z^2 + O(fz^3) \\ & (4.63) \text{ innsatt i (4.64) gir:} \\ & + O(f^2)(1+z^2) \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} & v''(1) = \frac{1}{6}v''(1) + \frac{1}{2}v''(1) \\ & = (-1)^{m+1} C_{p+3} z^{p+3} + i(-1)^m C_{p+2} z^{p+2} + O(z^{p+4}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Av (4.46) og (4.57):

$$(a_1 + v'(1))zf_0 - a_0 f_1 = (-1)^{m+1} C_{p+3} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \quad (4.58a)$$

$$a_0 f_0 + (a_1 + v'(1))f_1 z = (-1)^m C_{p+2} z^{p+1} + O(z^{p+3}) \quad (4.58b)$$

$$\text{Anta } f_1 = O(z^{p+2}). \quad (4.59)$$

Da følger fra (4.58b):

$$f_0(z) = \frac{(-1)^m C_{p+2}}{\mu''(1)} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \quad (4.60)$$

(4.60) innsatt i (4.58a):

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \left(-\frac{1}{2}\mu''(1) - \frac{1}{2}\mu'''(1) + v'(1)\right) \frac{1}{\mu''(1)} (-1)^m \frac{C_{p+1}}{\mu''(1)} z^{p+2} \\ &\quad + (-1)^m C_{p+3} z^{p+2} \frac{1}{\mu''(1)} + O(z^{p+3}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Løkningssystemet (4.58) har nøyaktig en løsning. Siden antakelsen om ordenen av f_1 brukt i (4.58b) stemmer med (4.58a) må antakelsen være riktig.

(4.61) ordnet:

$$f_1(z) = (-1)^m \{ \mu''(1) C_{p+3} + [\nu'(1) - \frac{1}{2}(\mu''(1) + \mu'''(1))] C_{p+2} \} \\ \cdot \frac{1}{(\mu''(1))^2} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \quad (4.62)$$

Som konklusjon kan vi si at

Ved henholdsvis 2 og 3 gangers derivasjon av (4.40b) med hensyn på z og innsatt $z=0$ fås:

$$\mu''(1) = 2\nu(1) \quad (4.63)$$

$$A(p, \mu) < 0 \quad (4.72)$$

$$\mu'''(1) = 6\nu'(1) - 6\nu(1) \quad (4.64)$$

og absolutt ustabil hvis

(4.63) innsatt i (4.64) gir:

$$A(p, \mu) > 0 \quad (4.73)$$

$$\nu'(1) = \frac{1}{6}\mu'''(1) + \frac{1}{2}\mu''(1) \quad (4.65)$$

hvor λ er gitt av (4.71)

Altså:

Lemma 4.2. Størmers og Cowells metoder er absolutt stabile om origo
hvis $\mu'''(1) < 0$

$$f_1(z) = (-1)^m \{ \mu''(1) C_{p+3} - \frac{1}{3}\mu'''(1) C_{p+2} \} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \quad (4.66)$$

Absoluttverdien til røttene følger da fra det foregående. (4.74)

Fra (4.41):

Lemma 4.2. Størmers metode er absolutt stabil om origo for

$$r = e^{iz} + f(z) \text{ og absolutt ustabil om ikke for}$$

$r = e^{iz}, z=1, 2, 3, \dots$

Det vil si at:

Beweis. Fra Lemma 4.1 og liste 6.6 har vi for Størmers metoden:

$$|r|^2 = 1 + |f|^2 + 2 \cdot \operatorname{Re}(e^{iz} \overline{f(z)}) \quad (4.67)$$

(4.42) gir da:

Størmers metode er gitt ved:

$$|r|^2 = 1 + f_0^2 + f_1^2 + 2(f_0 \cos z + f_1 \sin z) \quad (4.68)$$

$$= 1 + 2f_0^2 \left(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)\right) + 2f_1(z + O(z^3)) + f_0^2 + f_1^2 \quad (4.69)$$

Vi er ordenen til (4.75) gitt ved $p+1$, $m=2n$. Altså stabilt

Wed bruk av (4.60) og (4.66): $f_0(n=2k)$, f_1 og absolutt stabilitet

med $k=4-1$ ($n=2k+1$) $\frac{(-1)^m}{\mu''(1)} C_{p+2} z^{p+1} + O(z^{p+2})$ (4.70a)

Lemma 4.3. Cowells metode er absolutt stabil om origo for

$= 1 + A(p, \mu) z^{p+1} + O(z^{p+2}) \text{ og } k=p+2, n=1, 2, \dots$ (4.70b)

hyor

$$A(p, \mu) \equiv 2 \frac{(-1)^m C_{p+2}}{\mu''(1)} \equiv 2 \frac{(-1)^m C_{2m+3}}{\mu''(1)} \quad (4.71)$$

Som konklusjon kan en uttale:

Sats 4.1. Metoden (4.2) med orden $p=2m+1$, $m=1$, er absolutt stabil for $z \approx 0$, $z > 0$ ("om origo") hvis

$$A(p, \mu) < 0 \quad (4.72)$$

og absolutt ustabil hvis

$$A(p, \mu) > 0 \quad \text{og usto for } k=4\kappa+2 (\kappa=2, \dots), \kappa \geq 1. \quad \text{Q.E.D.} \quad (4.73)$$

hvor A er gitt av (4.71)

Sats 4.2. Størmers og Cowells metoder er absolutt stabile om origo hvis ordenen $p = 2m+1$, $m \geq 1$, $m \in N$ og

$$(-1)^m C_{2m+3} < 0 \quad (4.74)$$

Lemma 4.2. Størmers metode er absolutt stabil om origo for $p = 4\kappa+1$, $\kappa=1, 2, 3, \dots$ og absolutt ustabil om origo for $p = 4\kappa+1$, $\kappa=1, 2, 3, \dots$

Bevis: Fra Lemma 4.1 og [1, table 6.6] har en for Størmers metoder:

$$C_{2m+3} = \sigma_{2m+3} > 0, \quad m \geq 1$$

Størmers metode er gitt ved:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j v^j \phi_{n+1} \quad (4.75)$$

Da er ordenen til (4.75) gitt ved $p=k+1$, $k=2m$. Altså absolutt ustabilitet av (4.75) hvis $k=4\kappa$ ($m=2\kappa$), $\kappa \geq 1$ og absolutt stabilitet hvis $k=4\kappa-2$ ($m=2\kappa-1$), $\kappa \geq 1$. Q.E.D.

Lemma 4.3. Cowells metode er absolutt stabil om origo for $k=4\kappa$, $\kappa=1, 2, 3, \dots$ og absolutt ustabil for $k=4\kappa+2$, $\kappa=1, 2, 3, \dots$

Bevis: For Cowells metode

$$\text{der } u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j^* v_j \phi_{n+2} \quad (4.76)$$

er ordenen $p=k+1$, $C_{p+2}^* = \sigma_{k+1}^*$.

Fra [1, table 6.6] og Lemma 4.1:

$$C_{p+2} = \sigma_{k+1}^* < 0, \quad k \geq 3$$

Med $p=2m+1$ er $k=2m$. Siden metoden er banestabil for $k=2$ (Se avsnitt 4.2) og $\sigma_3^*=0$ antar vi at $m=2$. Fra Sats 4.2 har en da at:

Cowells metode er absolutt stabil om origo for $k=4\kappa$ ($m=2\kappa$), $\kappa \geq 1$ og absolutt ustabil om origo for $k=4\kappa+2$ ($m=2\kappa+1$), $\kappa \geq 1$. Q.E.D.

Anta så at $p=2m$, $m \geq 2$. Går en fram som tidligere får en tilsvarende (4.56):

$$\begin{aligned} & \{(a_1 + v'(1))f_0 z^2 - a_0 f_1 z\} + \{a_0 f_0 z + (a_1 + v'(1))f_1 z^2\} i \\ & + O(fz^3) + O(f^2)(1+z^2) \\ & = (-1)^m C_{p+2} z^{p+2} + i(-1)^m C_{p+3} z^{p+3} + O(z^{p+4}) \end{aligned} \quad (4.77)$$

som gir

$$\begin{aligned} z(a_1 + v'(1))f_0 - a_0 f_1 &= (-1)^m C_{p+2} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \\ a_0 f_0 + (a_1 + v'(1))f_1 z &= (-1)^m C_{p+3} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \end{aligned} \quad (4.78)$$

Altså:

$$f_1(z) = \frac{(-1)^{m+1}}{\mu''(1)} C_{p+2} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \quad (4.79a)$$

$$= Az^{p+1} + O(z^{p+2}) \quad (4.79b)$$

der

$$A \equiv \frac{(-1)^{m+1}}{\mu''(1)} C_{p+2} \quad (4.80)$$

$$f_0(z) = \frac{(-1)^m}{\mu''(1)} C_{p+3} z^{p+2} + \frac{-A(a_1 + v'(1))}{\mu''(1)} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \quad (4.81a)$$

$$= Bz^{p+2} + O(z^{p+3}) \quad (4.81b)$$

der

$$B \equiv \frac{(-1)^m}{(\mu''(1))^2} \{ \mu''(1)C_{p+3} - \frac{1}{3}\mu'''(1)C_{p+2} \} \quad (4.82)$$

Nå er:

$$|r|^2 = 1 + 2(Bz^{p+2} + O(z^{p+3})) \left(1 - \frac{z^2}{2} + O(z^4)\right) \quad (4.83a)$$

$$+ 2(Az^{p+1} + O(z^{p+2})) (z + O(z^3)) + f_0^2 + f_1^2$$

$$= 1 + Cz^{p+2} + O(z^{p+3}) \quad (4.83b)$$

der

$$C \equiv 2\{A+B\} = \frac{(-1)^m}{(\mu''(1))^2} \{ \mu''(1)C_{p+3} - (\mu''(1) + \frac{1}{3}\mu'''(1))C_{p+2} \} \quad (4.84)$$

Korollar 4.1. Med $\mu(r) = r^s - 2r^{s-1} + r^{s-2}$ er

$$\mu''(1) = 2, \quad \mu'''(1) = 6(s-2) \quad (4.85)$$

$$\text{Bevis: } \mu(r) = r^{s-2}(r-1)^2 \quad (4.86)$$

$$\mu''(r) = (s-2)(s-3)r^{s-4}(r-1)^2 + 2(s-2)r^{s-3}2(r-1) + r^{s-2} \cdot 2 \quad (4.87)$$

$$\mu''(1) = 2 \quad (4.88)$$

$$\begin{aligned} \mu'''(r) &= (s-2)(s-3)(s-4)r^{s-5}(r-1)^2 + 3(s-2)(s-3)r^{s-4}2(r-1) \\ &\quad + 3(s-2)r^{s-3} \cdot 2 + r^{s-2} \cdot 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

$$\mu'''(1) = 6(s-2) \quad (4.90)$$

Q.E.D.

Dette gir da at:

$$\mu''(1) + \frac{1}{3}\mu'''(1) = 2 + 2s - 4 = 2(s-1) \quad (4.91)$$

For Størmers metode (4.75) har vi:

$$p = k+1, C_{p+2} = \sigma_{k+1}, C_{p+3} = \sigma_{k+2}, k = p-1 = 2m-1,$$

$$s = k+1 = 2m$$

Av (4.91) ($m \geq 2$) følger da:

$$\mu''(1) + \frac{1}{3}\mu'''(1) = 2(2m-1) \quad (4.92)$$

og av (4.84):

$$\begin{aligned} C &= \frac{(-1)^m}{4} \{2v_{2m+1} - 2(2m-1)v_{2m}\} \\ &= \frac{(-1)^m}{2} \{v_{2m+1} - (2m-1)v_{2m}\} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Lemma 4.4. Størmers metode er absolutt stabil om origo dersom $k = 4\kappa-1$, $\kappa \geq 1$ og absolutt ustabil om origo dersom $k = 4\kappa+1$, $\kappa \geq 1$.

Bevis: $m=2$:

$$C = \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{40} - 3 \frac{19}{240} \right\} = - \frac{13}{160} < 0 \quad (4.94)$$

altså absolutt stabilitet om origo ifølge (4.83b).

Nå sier Lemma 4.1 at:

$$\sigma_j < \sigma_{j-1}, j \geq 4 \quad (4.95)$$

La så $m = 2\kappa$, $\kappa \geq 1$:

$$C = \frac{1}{2}(\sigma_{4\kappa+1} - (4\kappa-1)\sigma_{4\kappa}) < \frac{1}{2}\sigma_{4\kappa}(2-4\kappa) < 0, \kappa \geq 1 \quad (4.96)$$

Altså har en absolutt stabilitet om origo for $m=2\kappa$, $\kappa \geq 1$.

Setter så $m = 2\kappa+1$, $\kappa \geq 1$:

$$C = -\frac{1}{2}(\sigma_{4\kappa+3} - (4\kappa+1)\sigma_{4\kappa+2}) > \frac{1}{2}\sigma_{4\kappa+2}(4\kappa+1-1) = 2\kappa\sigma_{4\kappa+2} > 0 \quad (4.97)$$

Altså absolutt ustabilitet om origo for $m = 2\kappa+1$, $\kappa \geq 1$.

Q.E.D.

Lemma 4.2 og 4.4 kan da oppsummeres slik:

Sats 4.3. Størmers metode (4.75) er

- i) absolutt stabil om origo når $k = 4\kappa-2, 4\kappa-1, \kappa \in N, \kappa \geq 1$
- ii) absolutt ustabil om origo når $k = 4\kappa, 4\kappa+1, \kappa \in N, \kappa \geq 1$

For Cowells metode (4.76) har vi $p=k+1$, $C_{p+2}=\sigma_{k+1}^*$, $C_{p+3}=\sigma_{k+2}^*$.
Med $k=2m-1$:

$$C_{p+2} = \sigma_{2m}^*, \quad C_{p+3} = \sigma_{2m+1}^*$$

Av (4.91):

$$\mu''(1) + \frac{1}{3}\mu'''(1) = 4(m-1) \quad (4.98)$$

Fra (4.84) følger da:

$$\begin{aligned} C &= \frac{(-1)^m}{4} (2\sigma_{2m+1}^* - 4(m-1)\sigma_{2m}^*) \\ &= \frac{(-1)^m}{2} (\sigma_{2m+1}^* - 2(m-1)\sigma_{2m}^*) \end{aligned} \quad (4.99)$$

Lemma 4.5. Cowells metode (4.76) er absolutt stabil om origo for $k = 4\kappa+1, \kappa \geq 1$ og absolutt ustabil om origo for $k = 4\kappa-1, \kappa \geq 1$.

Bevis: Ifølge Lemma 4.1 er

$$\sigma_j^* < 0, \quad j \geq 4 \quad \text{og} \quad \sigma_j^* < \sigma_{j+1}^*, \quad j \geq 5$$

La $m = 2\kappa, \kappa \geq 2$ (da $\mu'''(1)=0$ for $\kappa=1$).

(4.99) gir da:

$$C = \frac{1}{2}(\sigma_{2m+1}^* - 2(m-1)\sigma_{2m}^*) > \frac{1}{2}\sigma_{2m}^*(1-2m+2) = \frac{3-2m}{2}\sigma_{2m}^* > 0 \quad (4.100)$$

Med $m=2\kappa+1, \kappa \geq 1$:

$$C = \frac{1}{2}(2(m-1)\sigma_{2m}^* - \sigma_{2m+1}^*) < \frac{1}{2}\sigma_{2m+1}^*(2m-2-1) = \frac{2m-3}{2}\sigma_{2m+1}^* < 0 \quad (4.101)$$

Q.E.D.

Lemma 4.3 og 4.5 gir totalt:

Sats 4.4. Cowells metode (4.76) er

- i) absolutt stabil om origo når $k = 4\kappa+1, 4\kappa, \kappa \geq 1$
- ii) absolutt ustabil om origo når $k = 4\kappa+2, 4\kappa+3, \kappa \geq 1$.

La oss så finne for hvilke reelle $z^2 > 0$ røttene r til (4.3) ligger på enhetssirkelen. ($r = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$).

Altså:

$$u(e^{i\theta}) + z^2 \cdot v(e^{i\theta}) = 0 \quad (4.102)$$

Da gjelder for $v(e^{i\theta}) \neq 0$ og for $\theta \in [0, 2\pi)$:

$$z^2 = f(\theta) \equiv -\frac{u(e^{i\theta})}{v(e^{i\theta})} \quad (4.103)$$

La oss først behandle Størmers metode (4.75).

For denne er:

$$f(\theta) = -\frac{r(1-r^{-1})^2}{\sum_{j=0}^k \sigma_j (1-r^{-1})^k} \Big|_{r=e^{i\theta}} \quad (4.104)$$

Setter:

$$1-e^{-i\theta} = a(\psi)e^{i\psi}, 0 \leq a \leq 2, -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, a \text{ reell} \quad (4.105)$$

Herav:

$$e^{-i\theta} = 1-ae^{i\psi} \quad (4.106)$$

Multipliserer begge sider av likningen med respektives komplekskonjugerte:

$$e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} = (1-ae^{i\psi})(1-ae^{-i\psi}) \quad (4.107a)$$

$$= 1-2\cos\psi+a^2 \quad (4.107b)$$

Vi ser da at:

$$a(\psi) = 2\cos\psi \quad (4.108)$$

Teller i $f(\theta)$:

$$r(r^{-1}-1)^2 = (r-1)(1-r^{-1})$$

Innsatt $r = e^{i\theta}$:

$$(e^{i\theta}-1)(1-e^{-i\theta}) = (1-a e^{-i\psi}-1)a e^{i\psi} \quad (4.109a)$$

$$= -a^2 \quad (4.109b)$$

$$= -4 \cos^2 \psi \quad (4.109c)$$

Herav:

$$f_k(\theta(\psi)) = \frac{4 \cos^2 \psi}{\sum_{j=0}^k \sigma_j a^j e^{i(j\psi)}} \quad (4.110)$$

$$\equiv \frac{4 \cos^2 \psi}{R_k(\psi) + i I_k(\psi)} \quad (4.111)$$

hvor

$$I_k(\psi) \equiv \sum_{j=1}^k \sigma_j a^j \sin(j\psi) = \sum_{j=1}^k \sigma_j 2^j (\cos \psi)^j \sin(j\psi) \quad (4.112)$$

$$R_k(\psi) \equiv \sum_{j=0}^k \sigma_j a^j \cos(j\psi) = \sum_{j=0}^k \sigma_j 2^j (\cos \psi)^j \cos(j\psi) \quad (4.113)$$

Innfører nå Tchebychevpolynomer av første og andre slag:

$$U_j(x) \equiv \frac{\sin(j\psi)}{\sin \psi} \quad (4.114)$$

$$T_j(x) \equiv \cos(j\psi) \quad (4.115)$$

der $\psi \equiv \arccos x$.

Siden vi bare behøver å betrakte $\psi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ er $x \in [0, 1]$.

Følgende funksjoner defineres:

$$\hat{I}_k(x) \equiv I_k(\arccos x) \quad (4.116)$$

$$\equiv \sqrt{1-x^2} \hat{I}_k(x) \quad (4.117)$$

$$\hat{R}_k(x) \equiv R_k(\arccos x) \quad (4.118)$$

Fra (4.112) og (4.113) følger da:

$$\tilde{I}_k(x) = \sum_{j=1}^k 2^j \sigma_j x^j U_j(x) \quad (4.119)$$

$$\tilde{R}_k(x) = \sum_{j=0}^k 2^j \sigma_j x^j T_j(x) \quad (4.120)$$

Utregnet:

$$\tilde{I}_2(x) = \frac{2}{3}x^3$$

$$\tilde{I}_3(x) = \frac{8}{3}x^5$$

$$\tilde{I}_4(x) = \frac{4}{15}x^5(38x^2 - 9)$$

$$\tilde{I}_5(x) = \frac{8}{15}x^7(72x^2 - 35)$$

$$\hat{R}_2(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^4$$

$$\hat{R}_3(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{8}{3}x^6$$

$$\hat{R}_4(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{15}x^4 - \frac{112}{15}x^6 + \frac{152}{15}x^8$$

$$\hat{R}_5(x) = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{15}x^4 + \frac{68}{15}x^6 - \frac{568}{15}x^8 + \frac{576}{15}x^{10}$$

For $f(\theta)$ har vi tilsvarende:

$$\hat{f}_k(x) \equiv f_k(\arccos x) \quad (4.122)$$

$$= \frac{4x^2}{\hat{R}_k(x) + i\hat{I}_k(x)} \quad (4.123)$$

Tabell 4.1. Nullpunkter x_0 for (4.3) og tilhørende verdi av
Ønsker nå å finne de $x_0 \in [0,1]$ som gir

$$\hat{I}_k(x_0) = 0 \quad (4.124)$$

De reelle og positive z^2 -verdiene som er slik at røttene til
(4.3) for Størmers metode ligger på enhetssirkelen er da gitt ved:

$$\hat{f}_k(x_0) = \frac{4x_0^2}{\hat{R}_k(x_0)} \quad (4.125)$$

Utrengnet:

$$k=2,3 \text{ gir bare } x_0=1 \text{ med } \hat{f}_2(1)=3 \text{ og } \hat{f}_3(1)=2.$$

$$k=4 \text{ gir } x_0=1 \text{ og } x_0=\frac{9}{38} \text{ med}$$

$$\hat{f}_4(1) = \frac{60}{49} \text{ og } \hat{f}_4\left(\frac{9}{38}\right) = \frac{2469240}{2215457}.$$

Numeriske resultater for $k \in [2,9]$ foreligger i tabell 4.1.

Fra sats 4.3 vet vi nå at Størmers metode med $k=2,3,6,7$
er absolutt stabil om origo og fra tabell 4.1 at stabilitets-
intervallene i de fire tilfellene er henholdsvis

$$(0,3), (0,2), (0,0.39204) \text{ og } (0,0.21094).$$

Tilsvarende vet vi at Størmers metode for $k=4,5,8,9$ er
absolutt ustabil om origo i intervallene

$$(0,1.1146), (0,0.70588), (0,0.11195) \text{ og } (0,0.058774).$$

For å finne alle absolutte stabilitetsintervallene kan en beregne
røttene til (4.3) for ulike z^2 innenfor de forskjellige intervallene
som tabell 4.1 gir. Resultatet av en slik undersøkelse foreligger
i tabell 4.2.

Tabell 4.1. Nullpunkter x_0 for $I_k(x)$ og tilhørende verdi av
 $z^2 = f_k(x_0)$, $k = 2(1)9$.

k	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_k(x_0)$	3	2	1.2245	0.70588	0.39090	0.21094	0.11195	0.058774
			0.23684	0.48611	0.092706	0.24512	0.38362	0.49548
			1.1146	7.1795	0.38204	1.0054	1.11772	0.72493
					0.64449	0.74337	0.048632	0.14450
					-2.0892	-0.62812	0.19777	0.61075
							0.80741	0.85069
							-0.25951	-0.11771

Tabell 4.2. Absolutte stabilitetsintervaller for Størmers metode når $k = 2(1)9$. *) Noen av intervallene som framgår av tabell 4.1 er ganske små. Det tas derfor forbehold i disse tilfelle mot at numeriske feil har gitt feil konklusjon angående stabilitet eller ikke i intervaller som ikke grenser til origo.

k	Abs. stab. intervall
2	(0, 3)
3	(0, 2)
4	(1.1146, 1.2245)
5	Ustabil
6	(0, 0.38204) *)
7	(0, 0.21094)
8	Ustabil *)
9	Ustabil *)

La oss så betrakte Cowells metode.

I dette tilfelle er:

$$f_k(\theta) = - \frac{(1-r^{-1})^2}{\sum_{j=0}^k \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \Big|_{r=e^{i\theta}} \quad (4.126a)$$

$$= \frac{r^{-1} \cdot 4 \cos^2 \psi}{\sum_{j=0}^k \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \Big|_{r=e^{i\theta}} \quad (4.126b)$$

Fra (4.106):

$$r = e^{i\theta} = 1 - a \cos \psi + a \sin \psi \cdot i \quad (4.127)$$

$$= 1 - 2 \cos^2 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi \cdot i \quad (4.128)$$

Herav:

$$f_k(\theta) \equiv \frac{4 \cos^2 \psi}{(1 - 2 \cos^2 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi \cdot i)(R_k^*(\psi) + i I_k^*(\psi))} \quad (4.129a)$$

$$\equiv \frac{4 \cos^2 \psi}{U_k(\psi) + i V_k(\psi)} \quad (4.129b)$$

hvor

$$U_k(\psi) \equiv (1 - 2 \cos^2 \psi) R_k^*(\psi) - 2 \cos \psi \sin \psi I_k^*(\psi) \quad (4.130)$$

$$V_k(\psi) \equiv (1 - 2 \cos^2 \psi) I_k^*(\psi) + 2 \cos \psi \sin \psi R_k^*(\psi) \quad (4.131)$$

og $R_k^*(\psi)$ og $I_k^*(\psi)$ er definert analogt til $R_k(\psi)$ og $I_k(\psi)$ i (4.113) og (4.112).

Innfører Tchebyshev polynomer igjen:

$$\hat{U}_k(x) \equiv U_k(\arccos x) \quad (4.132)$$

$$= (1 - 2x^2) \hat{R}_k^*(x) - 2x(1 - x^2) \hat{I}_k^*(x) \quad (4.133)$$

$$\hat{V}_k(x) \equiv V_k(\arccos x) \quad (4.134)$$

Utregnet:

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_2(x) &= \tilde{v}_3(x) = 0 \\
 \tilde{v}_4(x) &= \frac{2}{15}x^5 \\
 \tilde{v}_5(x) &= \frac{8}{15}x^7 \\
 \tilde{v}_6(x) &= \frac{4x^7}{945}(442x^2 - 95) \\
 \hat{u}_2(x) &= \hat{u}_3(x) = 1 - \frac{x^2}{3} \\
 \hat{u}_4(x) &= 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{15} + \frac{2}{15}x^6 \\
 \hat{u}_5(x) &= 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{15} - \frac{4}{15}x^6 + \frac{8}{15}x^8 \\
 \hat{u}_6(x) &= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{15} - \frac{31}{945}x^6 - \frac{1264}{945}x^8 + \frac{1768}{945}x^{10}
 \end{aligned} \tag{4.137}$$

Definerer nå x_0 slik at:

$$\hat{v}_k(x_0) = 0 \tag{4.138}$$

Da er

$$\hat{f}_k(x_0) = \frac{4x_0^2}{\hat{u}_k(x_0)} \tag{4.139}$$

Løsningen av (4.138) (en eller flere x_0) og denne(disse) innsatt i (4.139) foreligger i tabell 4.3; $k=2(1)6$. I tabell 4.4 er angitt de absolutte stabilitetsintervallene når $k=4, 5, 6$.

Tabell 4.3. Nullpunkter x_0 for $\hat{V}_k(x)$ og tilsvarende verdier av
 $z^2 = \hat{f}_k(x_0)$, $k=2(1)6$.

k	2	3	4	5	6
x_0	1	1	1	1	1
$\hat{f}_k(x_0)$	6	6	$\frac{60}{11}$	$\frac{60}{13}$	$\frac{945}{260}$
					$\sqrt{\frac{95}{442}}$ 0.92295

Tabell 4.4. Absolutte stabilitetsintervaller for Cowells metode når $k=4(1)6$. For $k=2,3$ er metoden banestabil.

k	Abs.stab.intervall
4	(0, 5.45455)
5	(0, 4.61538)
6	(0.92295, 3.6346)

4.2. Numerisk undersøkelse av absolute stabilitetsområder for Størmers og Cowells metoder.

Den teori som er presentert i avsnitt 4.1 ble utledet som følge av endel overraskende resultater ved undersøkelse av stabilitetskurer for Størmers og Cowells metoder. Særlig oppdagelsen av at Størmers metode med $k=5$ er absolutt ustabil for alle skrittengder h , bidrog til dette. Også resultatet at ikke alle metodene var absolutt stabile for små nok h , var uventet når en kjenner teorien for flerskriftsmetoder for løsning av 1. ordens likninger. Vi vil i det følgende oppsummere de numeriske undersøkelser som ble gjort.

Med en stabilitetskurve til en numerisk metode av typen:

$$\mu(E)u_n = h^2 v(E)\phi_n \quad (4.140)$$

vil vi mene avbildningen av enhetssirkelen i r -planet inn i z^2 -planet hvor

$$z^2(r) = -\frac{\mu(r)}{v(r)}. \quad (4.141)$$

(4.141) fås ved anvendelse av testproblemene

$$y'' = -\lambda^2 y \quad (4.142)$$

på (4.140) når $z^2 = h^2 \lambda^2$. (4.142) har for reelle λ periodisk løsning. Når den eksakte løsning er begrenset, kan vi ikke tillate at metoden til numerisk løsning av problemet er ustabil.

Den numeriske løsning av (4.142) er begrenset hvis $|r| \leq 1$.

Ved løsningen er det derfor nødvendig å velge h slik at z^2 ligger i et stabilt intervall begrenset av en slik stabilitetskurve.

Fra (4.40) og (4.41) har en:

Størmers metode:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j v^j \phi_{n+1} \quad (4.143)$$

Cowells metode:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j^* v^j \phi_{n+2} \quad (4.144)$$

Fra (4.141) fås nå idet $v \equiv 1 - E^{-1}$:

$$z_{k, \text{Størmer}}^2 = - \frac{(r-1)^2}{r \sum_{j=0}^k \sigma_j (1-r^{-1})^j} \quad (4.145)$$

og

$$z_{k, \text{Cowell}}^2 = - \frac{(r-1)^2}{r^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \quad (4.146)$$

(Jfr. tabell 4.5 og 4.6.)

Setter $r = e^{i\theta}$ og lar θ anta alle verdier på et gitter $\{\frac{2\pi j}{n}\}_{j=0}^{n-1}$.

Beregner så $z_{k,n,j}^2 = z_k^2 (e^{\frac{i2\pi j}{n}})$, $j=0(1)n-1$.

Disse z^2 -verdiene er beregnet numerisk og plottet inn i figurene 4.1-9 for $k=0(1)6$ bortsett fra i tilfelle hvor metoden er banestabil.

Stabilitetskurven skjærer den reelle akse i ett eller flere punkter slik at den reelle akse deles opp i ett eller flere intervaller. For hvert av disse intervaller velges en (reell) z^2 -verdi, og en finner tilsvarende røtter r numerisk fra (4.145) eller (4.146). Hvis absoluttverdien av alle røttene er mindre enn 1, er intervallet absolutt stabilt, ellers absolutt ustabilt. Resultatet av denne undersøkelsen er angitt i de samme figurer. Det er forøvrig full overensstemmelse mellom disse figurene og teorien fra avsnitt 4.1.

Som en ekstra kontroll av noen av resultatene ble $y'' = -\lambda^2 y$ integrert med Størmers metode, $k=4$ og 5 og med Cowells metode, $k=6$. Det ble brukt skritt $h=1$ og $z^2 (= \lambda^2)$ ble valgt lik ett punkt innenfor de ulike intervaller. Som "startmetode" ble brukt den kjente analytiske løsning, og ca. 1000 skritt ble tatt. Utfallet av denne testen underbygger de tidligere refererte resultater. Se vedlegg 1.

Forklaring til stabilitetskurvene i figurene 4.1-9:
Områdene med absolutt stabilitet er angitt med "abs. stab.". De områdene hvor kurvene skjærer den reelle akse med liten vinkel-

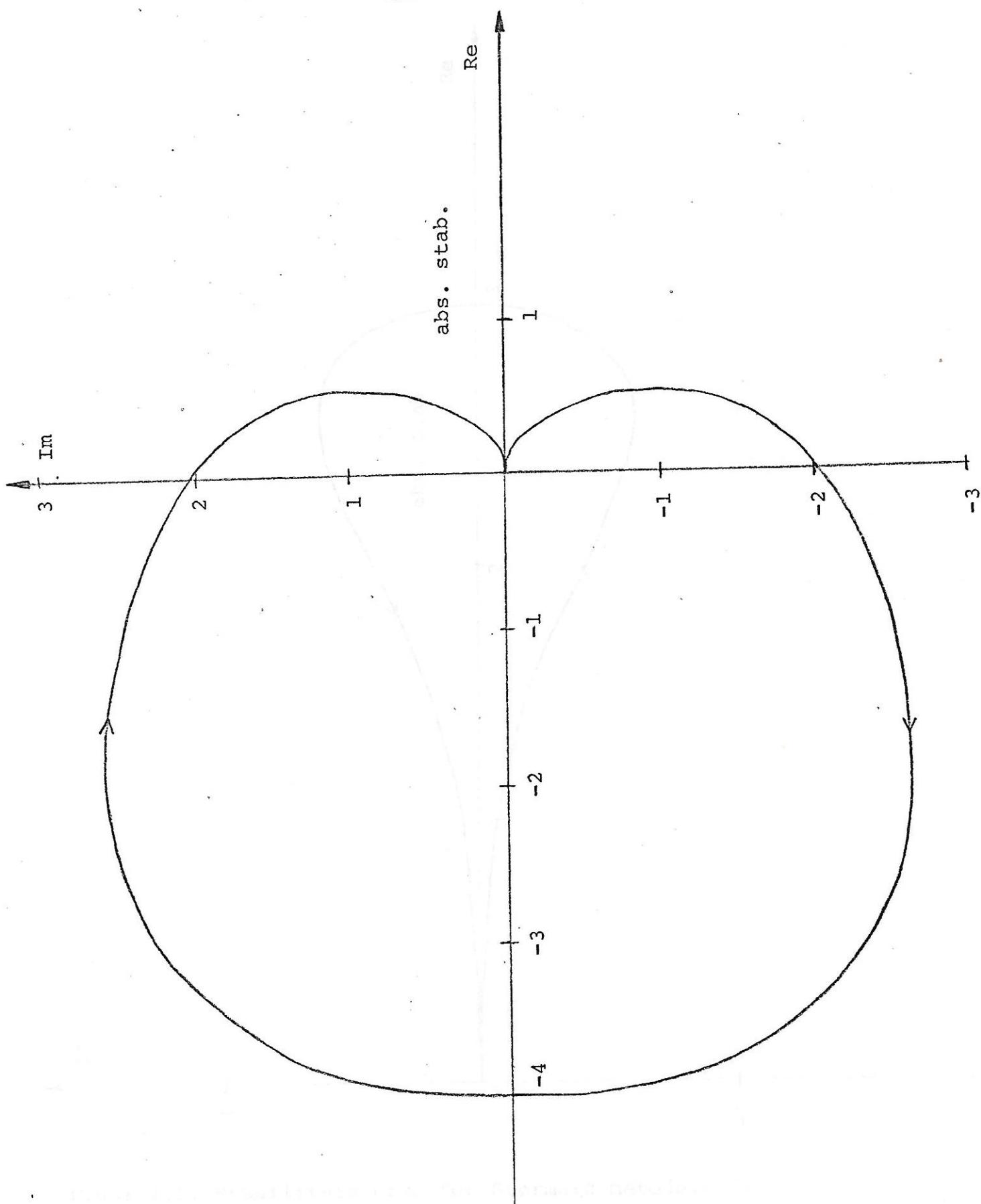
Tabell 4.5. $z_k^2, \text{Størmer}(r)$, $k=0(1)6$.

k	$z_k^2, \text{Størmer}(r)$
0	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
1	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\frac{12r(r-1)^2}{13r^2-2r+1}$
3	$-\frac{12r^2(r-1)^2}{14r^3-5r^2+4r-1}$
4	$-\frac{240r^3(r-1)^2}{299r^4-176r^3+194r^2-96r+19}$
5	$-\frac{240r^4(r-1)^2}{317r^5-266r^4+374r^3-276r^2+109r-18}$
6	$-\frac{60480r^5(r-1)^2}{84199r^6-92922r^5+158973r^4-155852r^3+92193r^2-30426r+4315}$

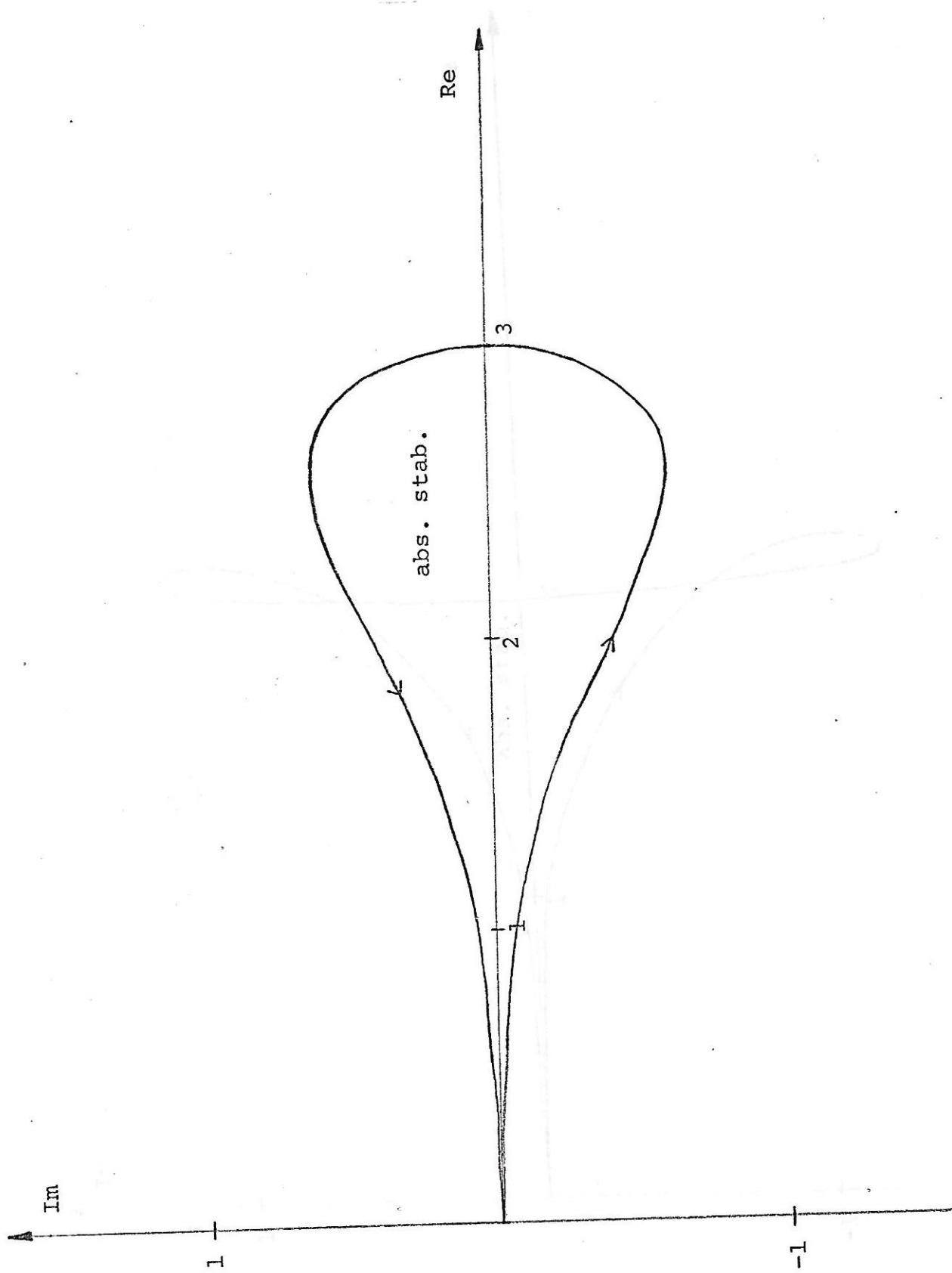
Tabell 4.6. $z_{k, \text{Cowell}}^2(r)$, $k=0(1)6$.

k	$z_{k, \text{Cowell}}^2(r)$
0	$-\frac{(r-1)^2}{r^2}$
1	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\frac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
3	$-\frac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
4	$-\frac{240r^2(r-1)^2}{19r^4+204r^3+14r^2+4r-1}$
5	$-\frac{240r^3(r-1)^2}{18r^5+209r^4+4r^3+14r^2-6r+1}$
6	$-\frac{60480r^4(r-1)^2}{4315r^6+53994r^5-2307r^4+7948r^3-4827r^2+1578r-221}$

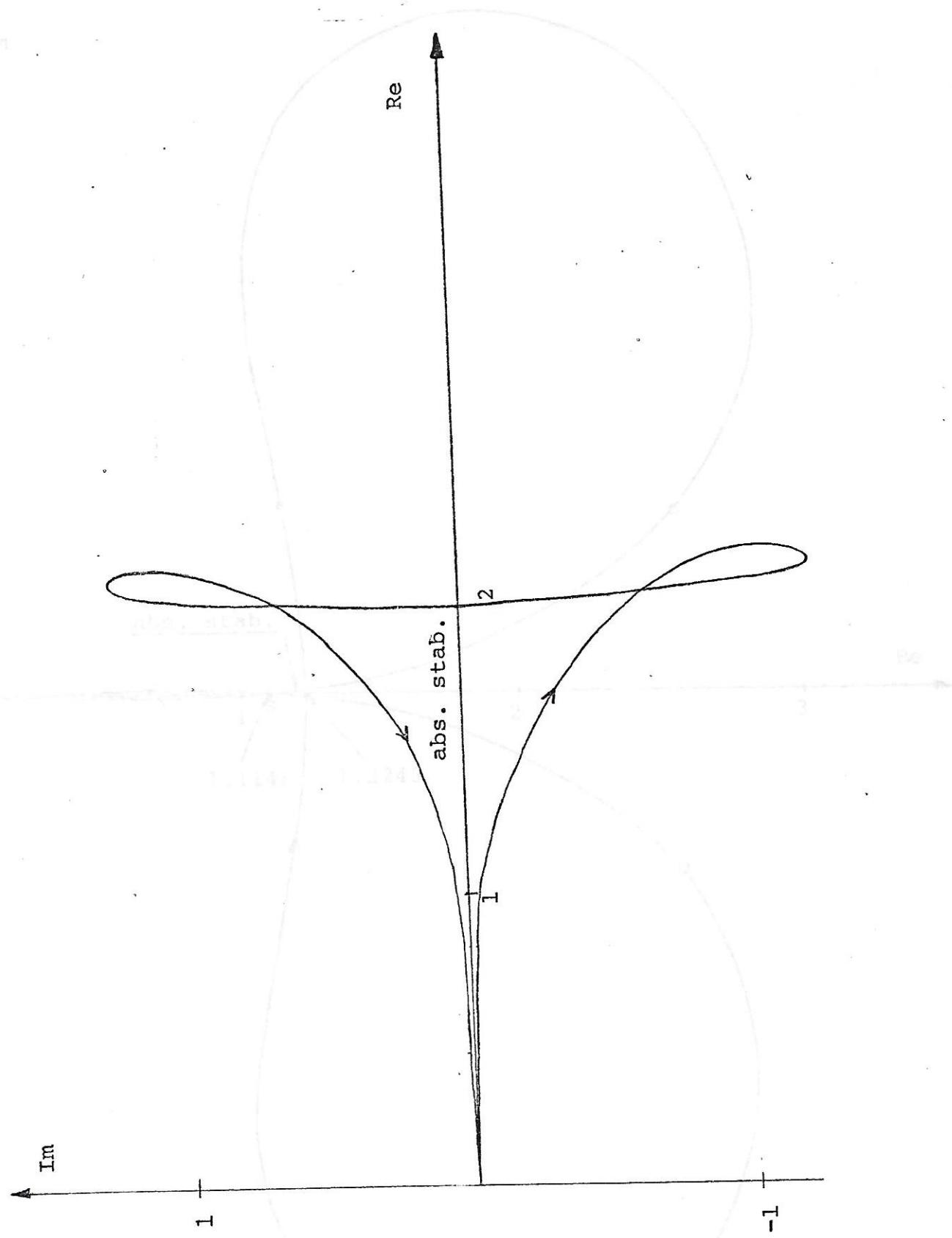
Figur 4.1. Stabilitetskurve for Cowells metode.



Figur 4.1. Stabilitetsskurve for Cowells metode, $k=0$.



Figur 4.2. Stabilitetskurve for Størmers metode, $k=2$.



Figur 4.3. Stabilitetskurve for Størmers metode, $k=3$.

La oss så betrakte Cowells metode.

I dette tilfelle er:

$$f_k(\theta) = - \frac{(1-r^{-1})^2}{\sum_{j=0}^k \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \Big|_{r=e^{i\theta}} \quad (4.126a)$$

$$= \frac{r^{-1} \cdot 4 \cos^2 \psi}{\sum_{j=0}^k \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \Big|_{r=e^{i\theta}} \quad (4.126b)$$

Fra (4.106):

$$r = e^{i\theta} = 1 - a \cos \psi + a \sin \psi \cdot i \quad (4.127)$$

$$= 1 - 2 \cos^2 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi \cdot i \quad (4.128)$$

Herav:

$$f_k(\theta) \equiv \frac{4 \cos^2 \psi}{(1 - 2 \cos^2 \psi + 2 \cos \psi \sin \psi \cdot i)(R_k^*(\psi) + i I_k^*(\psi))} \quad (4.129a)$$

$$\equiv \frac{4 \cos^2 \psi}{U_k(\psi) + i V_k(\psi)} \quad (4.129b)$$

hvor

$$U_k(\psi) \equiv (1 - 2 \cos^2 \psi) R_k^*(\psi) - 2 \cos \psi \sin \psi I_k^*(\psi) \quad (4.130)$$

$$V_k(\psi) \equiv (1 - 2 \cos^2 \psi) I_k^*(\psi) + 2 \cos \psi \sin \psi R_k^*(\psi) \quad (4.131)$$

og $R_k^*(\psi)$ og $I_k^*(\psi)$ er definert analogt til $R_k(\psi)$ og $I_k(\psi)$ i (4.113) og (4.112).

Innfører Tchebyshev polynomer igjen:

$$\hat{U}_k(x) \equiv U_k(\arccos x) \quad (4.132)$$

$$= (1 - 2x^2) \hat{R}_k^*(x) - 2x(1 - x^2) \tilde{I}_k^*(x) \quad (4.133)$$

$$\hat{V}_k(x) \equiv V_k(\arccos x) \quad (4.134)$$

$$= \sqrt{1 - x^2} \tilde{V}_k(x) \quad (4.135)$$

Utregnet:

$$\tilde{v}_2(x) = \tilde{v}_3(x) = 0$$

$$\tilde{v}_4(x) = \frac{2}{15}x^5$$

$$\tilde{v}_5(x) = \frac{8}{15}x^7$$

$$\tilde{v}_6(x) = \frac{4x^7}{945}(442x^2 - 95)$$

$$\hat{u}_2(x) = \hat{u}_3(x) = 1 - \frac{x^2}{3}$$

$$\hat{u}_4(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{15} + \frac{2}{15}x^6$$

$$\hat{u}_5(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{15} - \frac{4}{15}x^6 + \frac{8}{15}x^8$$

$$\hat{u}_6(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{15} - \frac{31}{945}x^6 - \frac{1264}{945}x^8 + \frac{1768}{945}x^{10}$$

(4.137)

Definerer nå x_0 slik at

$$\hat{v}_k(x_0) = 0 \quad (4.138)$$

Da er

$$\hat{f}_k(x_0) = \frac{\frac{4x_0^2}{\hat{u}_k(x_0)}}{} \quad (4.139)$$

Løsningen av (4.138) (en eller flere x_0) og denne(disse) innsatt i (4.139) foreligger i tabell 4.3; $k=2(1)6$. I tabell 4.4 er angitt de absolutte stabilitetsintervallene når $k=4, 5, 6$.

Tabell 4.3. Nullpunkter x_0 for $\hat{V}_k(x)$ og tilsvarende verdier av
 $z^2 = \hat{f}_k(x_0)$, $k=2(1)6$.

k	2	3	4	5	6
x_0	1	1	1	1	1
$\hat{f}_k(x_0)$	6	6	$\frac{60}{11}$	$\frac{60}{13}$	$\frac{945}{260}$
					$\sqrt{\frac{95}{442}}$ 0.92295

Tabell 4.4. Absolutte stabilitetsintervaller for Cowells metode når $k=4(1)6$. For $k=2,3$ er metoden banestabil.

k	Abs.stab.intervall
4	(0,5.45455)
5	(0,4.61538)
6	(0.92295, 3.6346)

4.2. Numerisk undersøkelse av absolute stabilitetsområder for Størmers og Cowells metoder.

Den teori som er presentert i avsnitt 4.1 ble utledet som følge av enkel overraskende resultater ved undersøkelse av stabilitetskurver for Størmers og Cowells metoder. Særlig oppdagelsen av at Størmers metode med $k=5$ er absolutt ustabil for alle skrittstegn h , bidrog til dette. Også resultatet at ikke alle metodene var absolutt stabile for små nok h , var uventet når en kjener teorien for flerskriftsmetoder for løsning av 1. ordens likninger. Vi vil i det følgende oppsummere de numeriske undersøkelser som ble gjort.

Med en stabilitetskurve til en numerisk metode av typen:

$$\mu(E)u_n = h^2 v(E)\phi_n \quad (4.140)$$

vil vi mene avbildningen av enhetssirkelen i r -planet inn i z^2 -planet hvor

$$z^2(r) = -\frac{\mu(r)}{v(r)}. \quad (4.141)$$

(4.141) fås ved anvendelse av testproblemet

$$y'' = -\lambda^2 y \quad (4.142)$$

på (4.140) når $z^2 = h^2 \lambda^2$. (4.142) har for reelle λ periodisk løsning. Når den eksakte løsning er begrenset, kan vi ikke tillate at metoden til numerisk løsning av problemet er ustabil. Den numeriske løsning av (4.142) er begrenset hvis $|r| \leq 1$. Ved løsningen er det derfor nødvendig å velge h slik at z^2 ligger i et stabilt intervall begrenset av en slik stabilitetskurve.

Fra (4.40) og (4.41) har en:

Størmers metode:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j v^j \phi_{n+1} \quad (4.143)$$

Cowells metode:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j^* v^j \phi_{n+2} \quad (4.144)$$

Fra (4.141) fås nå idet $v \equiv 1-E^{-1}$:

$$z_{k, \text{Størmer}}^2 = - \frac{(r-1)^2}{r \sum_{j=0}^k \sigma_j (1-r^{-1})^j} \quad (4.145)$$

og

$$z_{k, \text{Cowell}}^2 = - \frac{(r-1)^2}{r^2 \sum_{j=0}^k \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \quad (4.146)$$

(Jfr. tabell 4.5 og 4.6.)

Setter $r = e^{i\theta}$ og lar θ anta alle verdier på et gitter $\{\frac{2\pi j}{n}\}_{j=0}^{n-1}$.

Beregner så $z_{k,n,j}^2 = z_k^2 (e^{\frac{i2\pi j}{n}})$, $j=0(1)n-1$.

Disse z^2 -verdiene er beregnet numerisk og plottet inn i figurene 4.1-9 for $k=0(1)6$ bortsett fra i tilfelle hvor metoden er banestabil.

Stabilitetskurven skjærer den reelle akse i ett eller flere punkter slik at den reelle akse deles opp i ett eller flere intervaller. For hvert av disse intervaller velges en (reell) z^2 -verdi, og en finner tilsvarende røtter r numerisk fra (4.145) eller (4.146). Hvis absoluttverdien av alle røttene er mindre enn 1, er intervallet absolutt stabilt, ellers absolutt ustabilt. Resultatet av denne undersøkelsen er angitt i de samme figurer. Det er forøvrig full overensstemmelse mellom disse figurene og teorien fra avsnitt 4.1.

Som en ekstra kontroll av noen av resultatene ble $y'' = -\lambda^2 y$ integrert med Størmers metode, $k=4$ og 5 og med Cowells metode, $k=6$. Det ble brukt skritt $h=1$ og $z^2 (= \lambda^2)$ ble valgt lik ett punkt innenfor de ulike intervaller. Som "startmetode" ble brukt den kjente analytiske løsning, og ca. 1000 skritt ble tatt. Utfallet av denne testen underbygger de tidligere refererte resultater. Se vedlegg 1.

Forklaring til stabilitetskurvene i figurene 4.1-9:

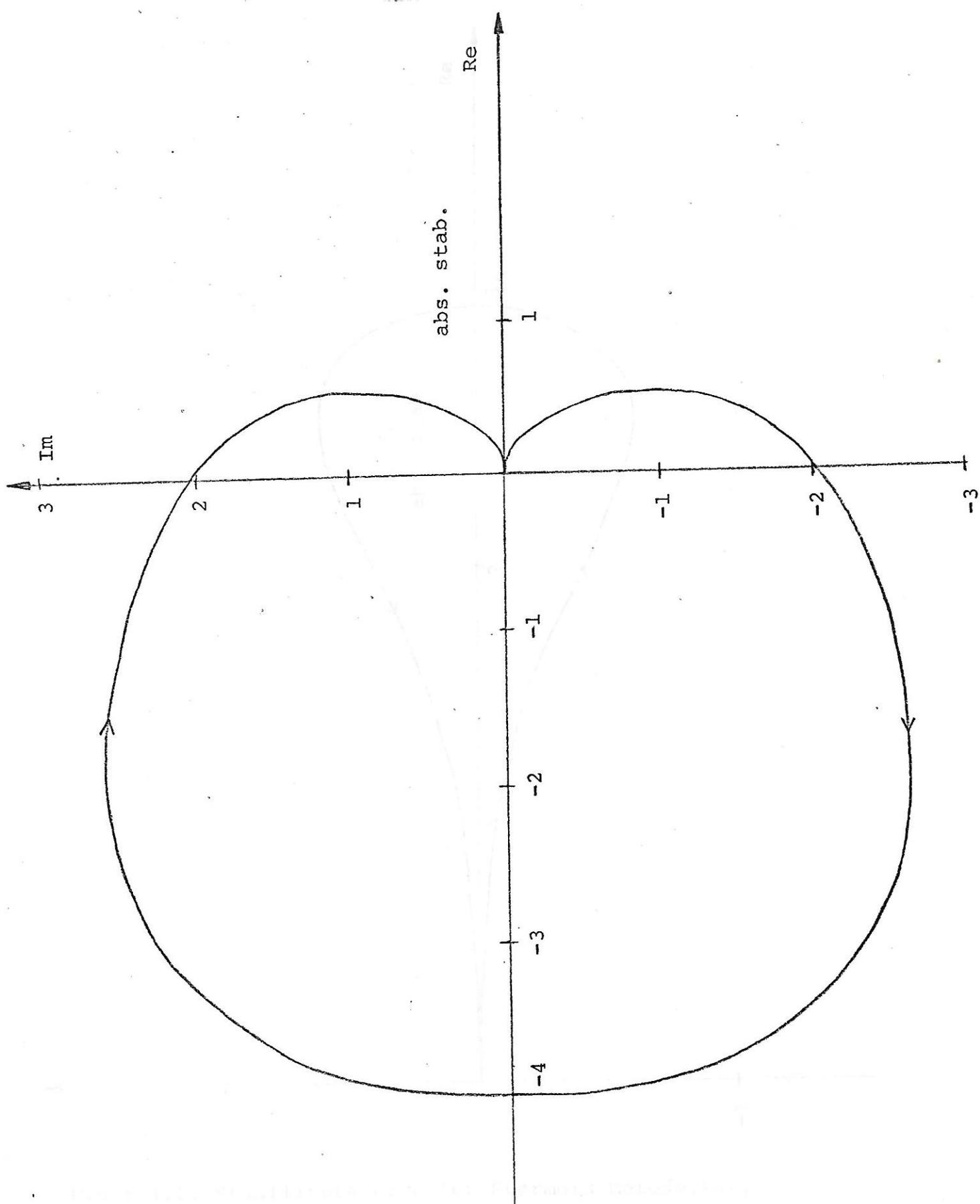
Områdene med absolutt stabilitet er angitt med "abs. stab.". De steder hvor kurvene skjærer den reelle akse med liten vinkelkoeffisient er markert med "s". Pilene på kurvene svarer til positiv dreieretning for enhetssirkelen i r -planet.

Tabell 4.5. $z_k^2, \text{Størmer}(r)$, $k=0(1)6$.

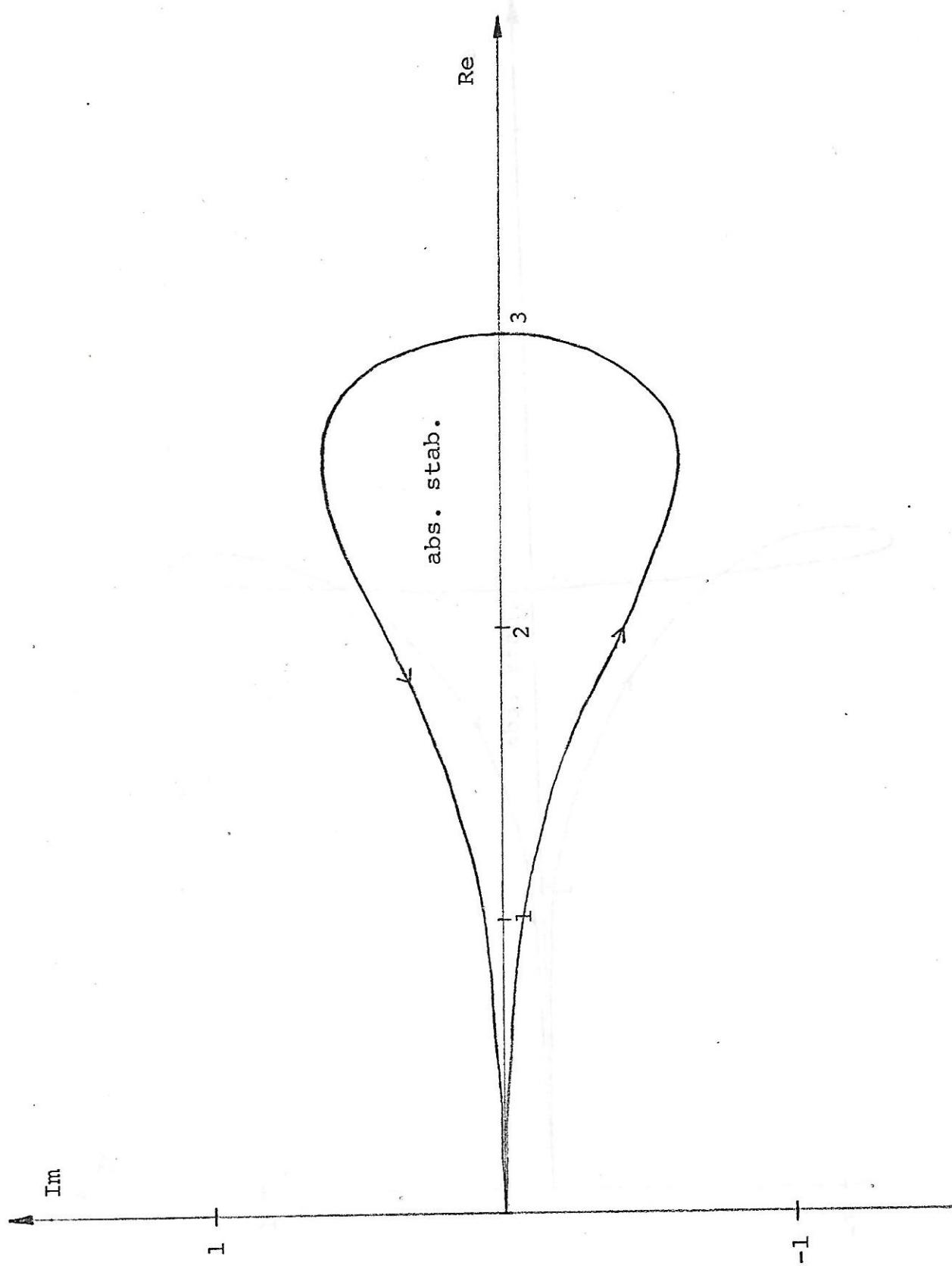
k	$z_k^2, \text{Størmer}(r)$
0	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
1	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\frac{12r(r-1)^2}{13r^2-2r+1}$
3	$-\frac{12r^2(r-1)^2}{14r^3-5r^2+4r-1}$
4	$-\frac{240r^3(r-1)^2}{299r^4-176r^3+194r^2-96r+19}$
5	$-\frac{240r^4(r-1)^2}{317r^5-266r^4+374r^3-276r^2+109r-18}$
6	$-\frac{60480r^5(r-1)^2}{84199r^6-92922r^5+158973r^4-155852r^3+92193r^2-30426r+4315}$

Tabell 4.6. $z_{k, \text{Cowell}}^2(r)$, $k=0(1)6$.

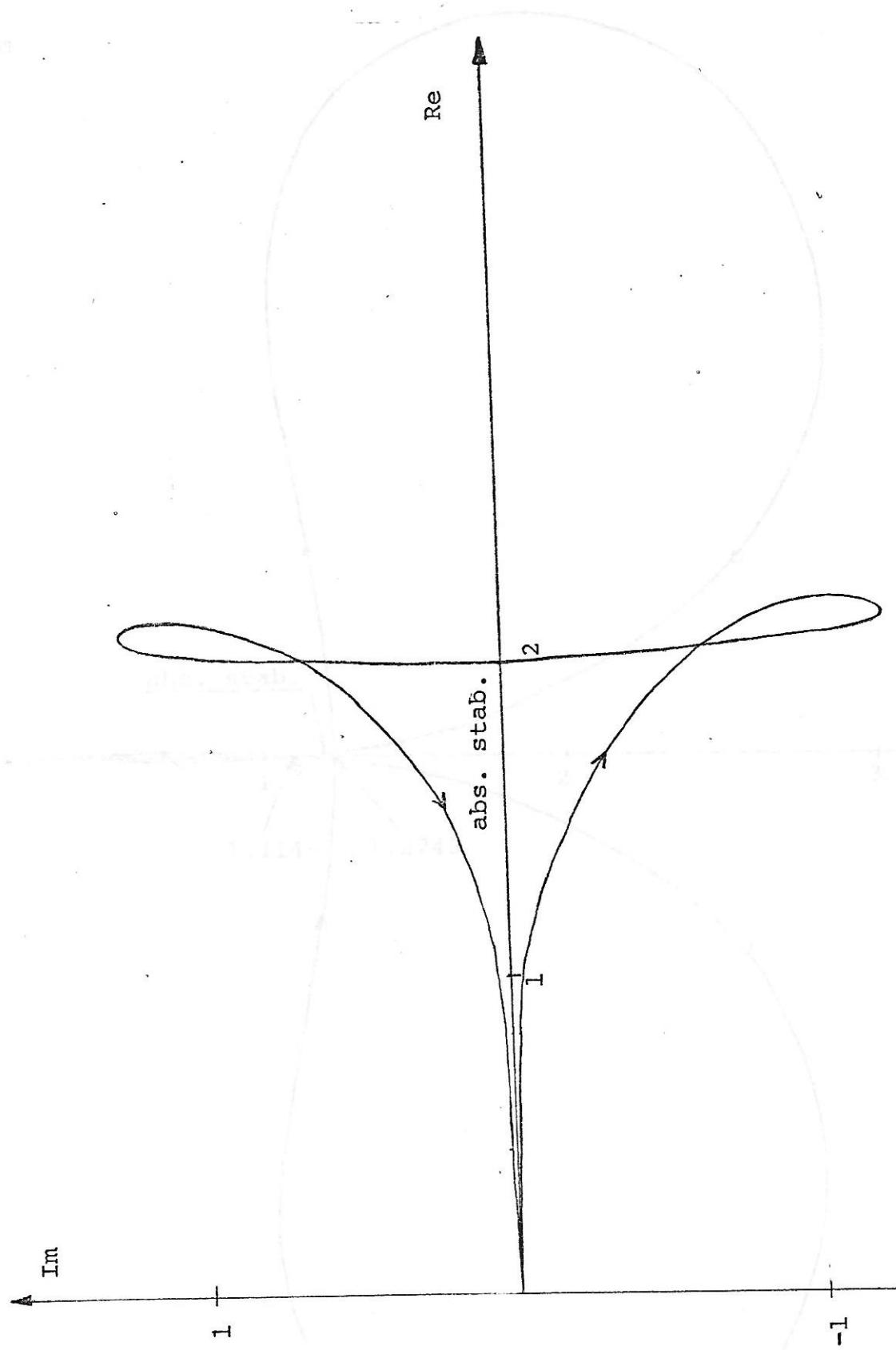
k	$z_{k, \text{Cowell}}^2(r)$
0	$-\frac{(r-1)^2}{r^2}$
1	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\frac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
3	$-\frac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
4	$-\frac{240r^2(r-1)^2}{19r^4+204r^3+14r^2+4r-1}$
5	$-\frac{240r^3(r-1)^2}{18r^5+209r^4+4r^3+14r^2-6r+1}$
6	$-\frac{60480r^4(r-1)^2}{4315r^6+53994r^5-2307r^4+7948r^3-4827r^2+1578r-221}$



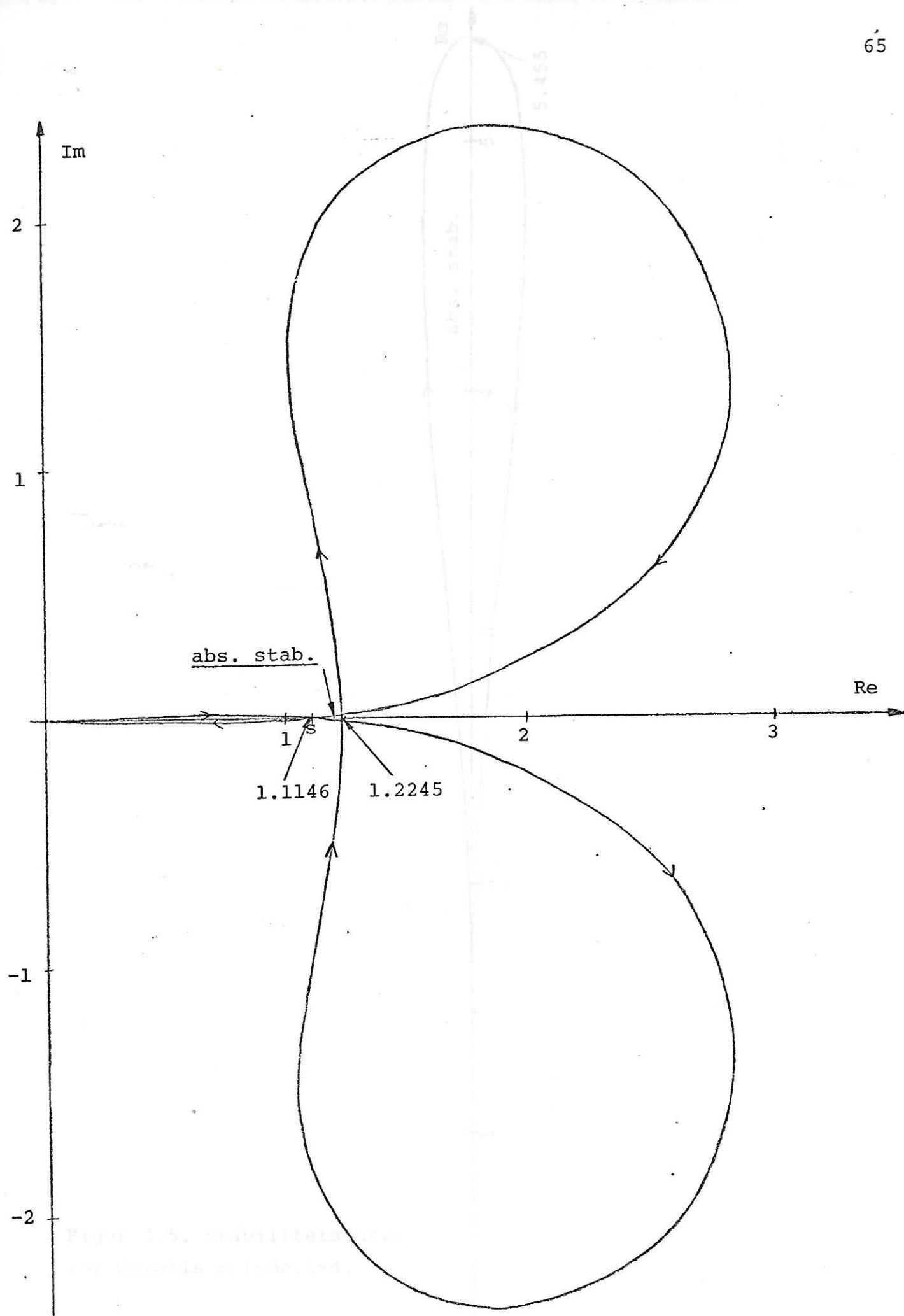
Figur 4.1. Stabilitetskurve for Cowells metode, $k=0$.



Figur 4.2. Stabilitetskurve for Størmers metode, $k=2$.

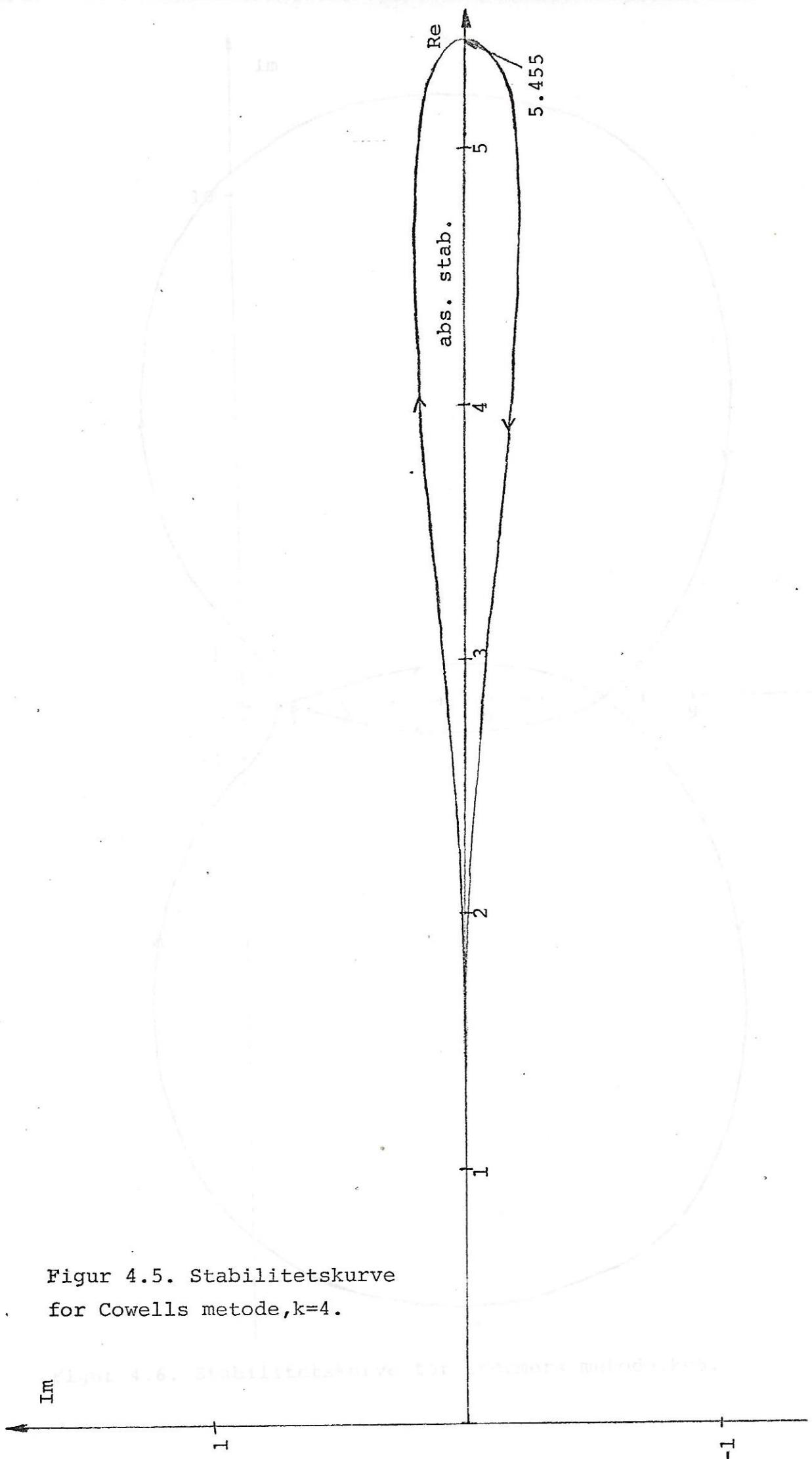


Figur 4.3. Stabilitetskurve for Størmers metode, $k=3$.

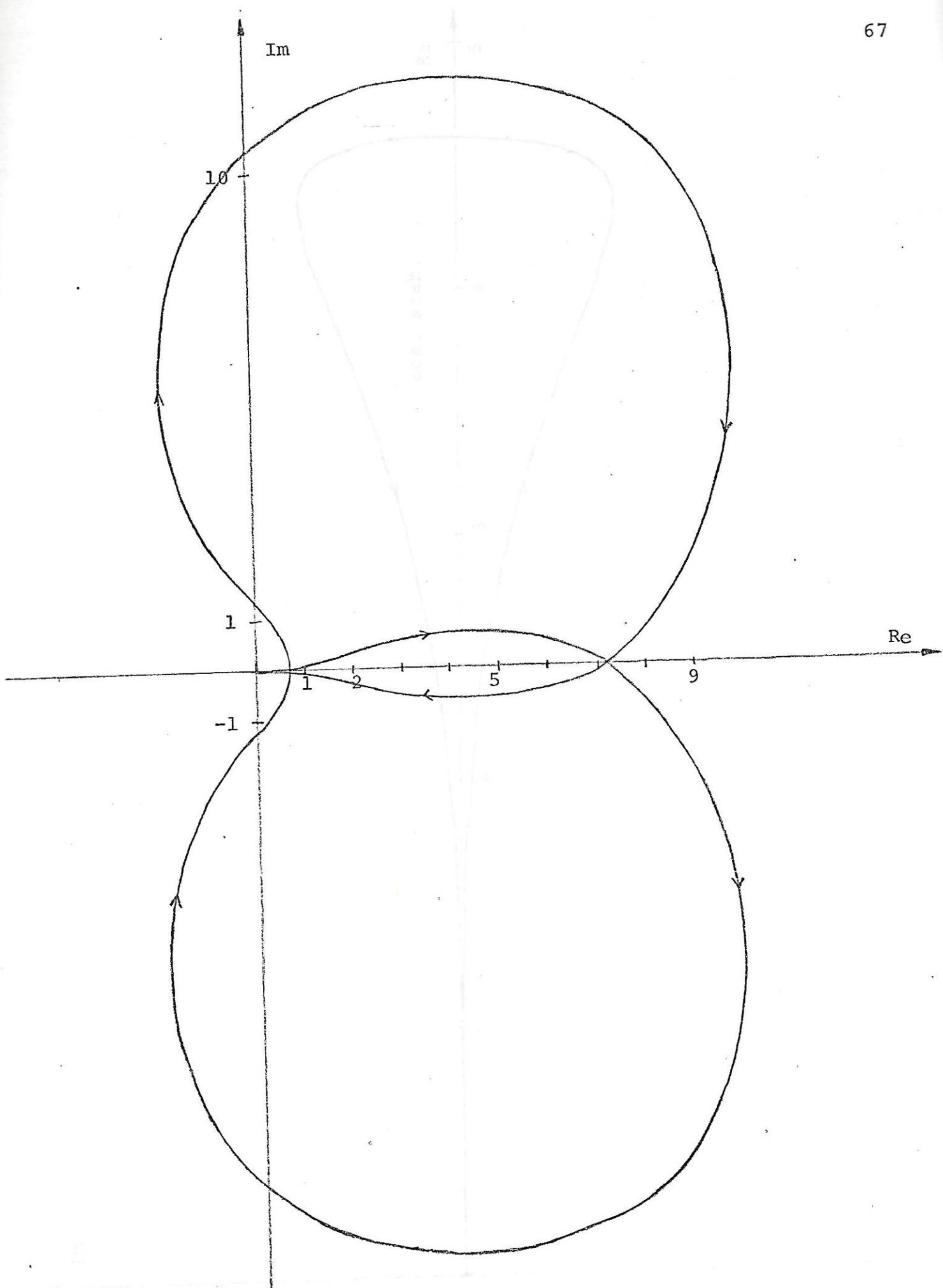


Figur 4.5. Stabilitetskurve
for Størmers metode, k=4.

Figur 4.4. Stabilitetskurve for Størmers metode, k=4.

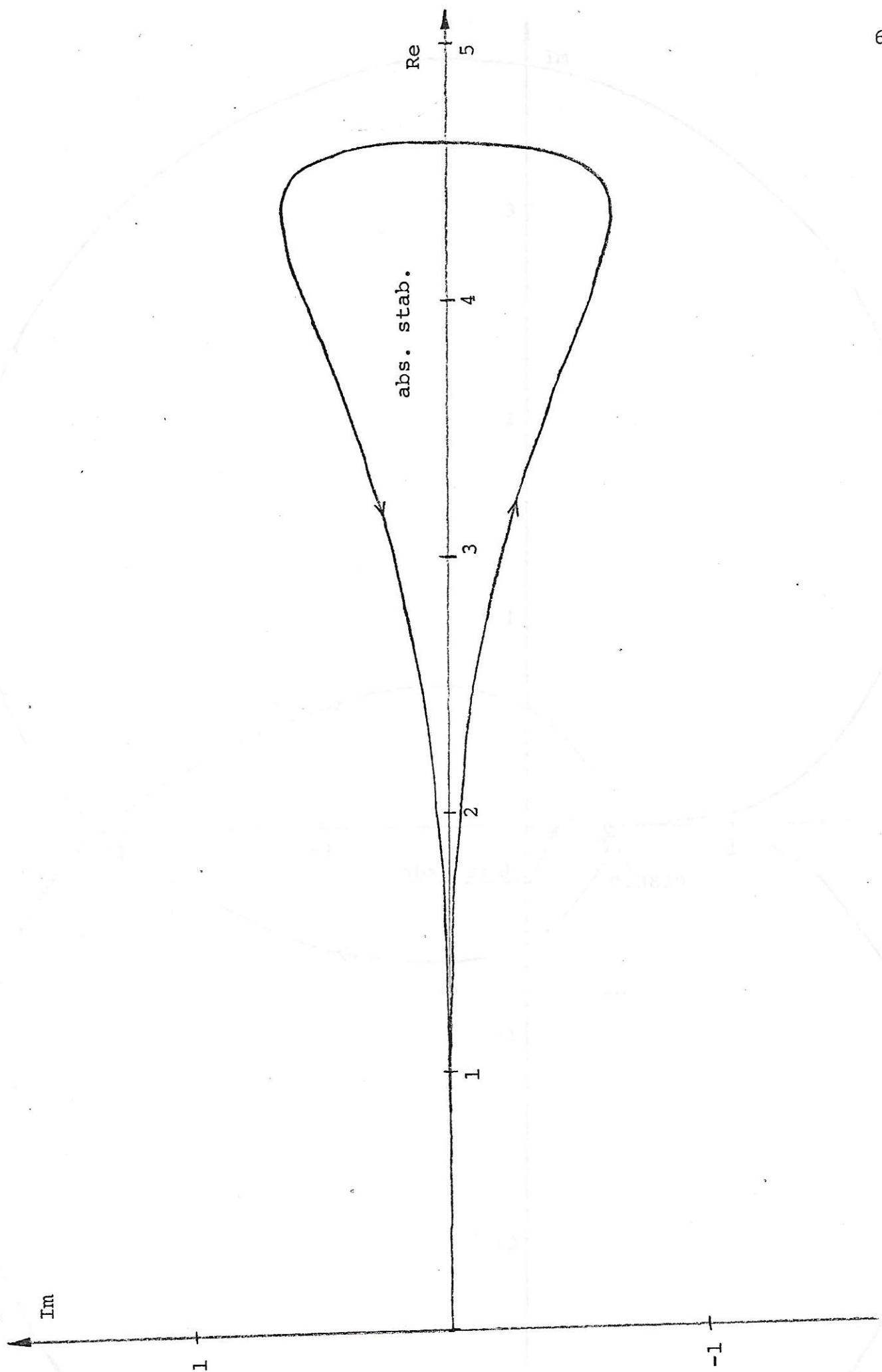


Figur 4.5. Stabilitetskurve
for Cowells metode, $k=4$.

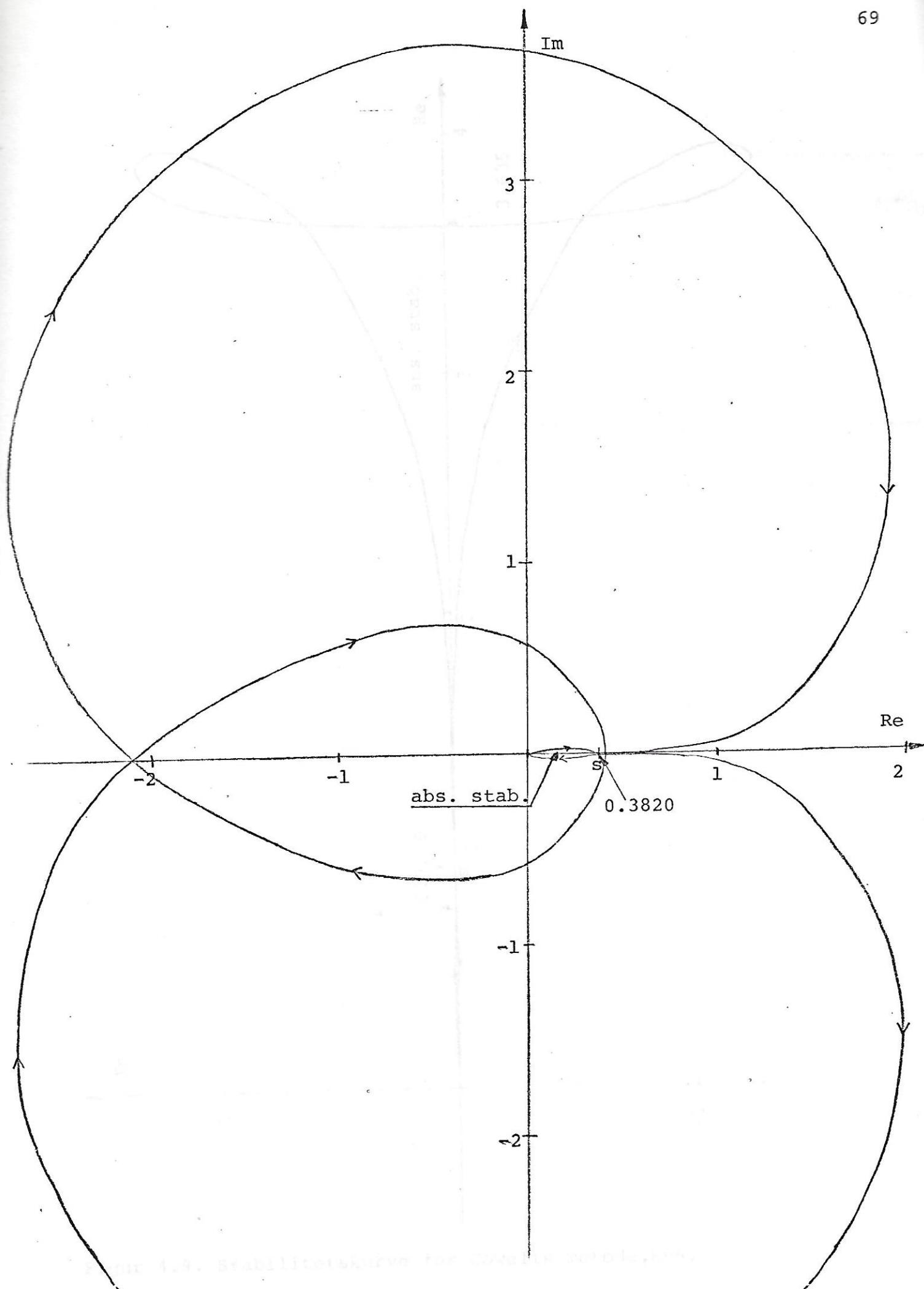


Figur 4.6. Stabilitetskurve for Størmers metode, $k=5$.

Figur 4.7. Stabilitetskurve for 4. ordens Runge-Kutta metoden.

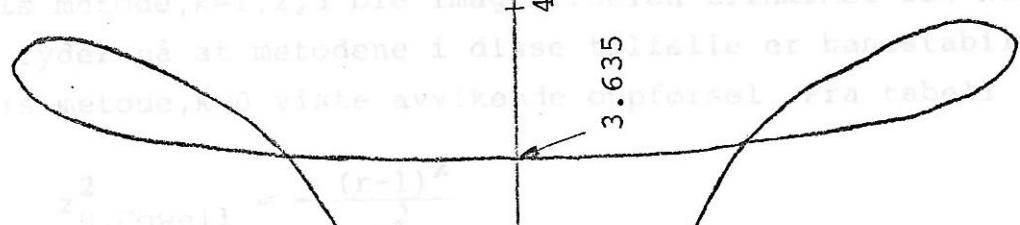


Figur 4.7. Stabilitetskurve for Cowells metode, $k=5$.



Figur 4.8. Stabilitetskurve for Størmers metode, $k=6$.

Ved beregningen av λ^2 blir Størmers metode, $k=0,1$ og Cowells metode, $r=1,2,3$ ble innhørdele tilnærmet lik null. Dette viser på at metodene i disse tilfelle er bærestabilt. Cowells metode, $k=6$ viste avvikende driftsrelasjoner fra tabell 4.6:



$$(4.147)$$

Herved:

$$\lambda^2 = ((r-2)^2)x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (4.148)$$

Løsningsvei:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-x^2)}}{2(x^2-1)} \quad (4.149a)$$

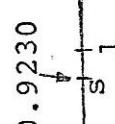
$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{1+x^2} \quad (4.149b)$$

Absoluteverdi:

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{(1+x^2)^2}} \quad (4.150)$$

Herfra ser vi at

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} |\lambda| = 0$$

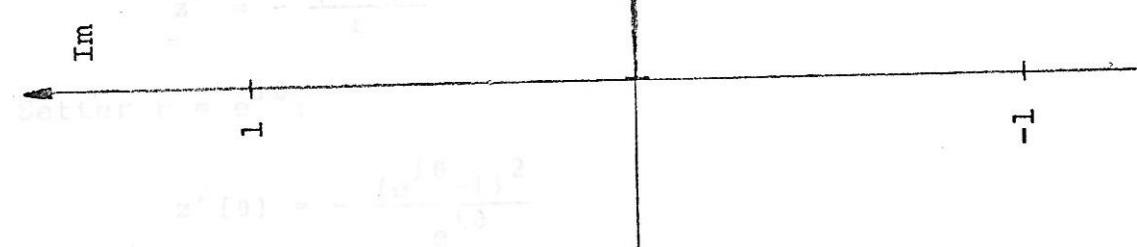


$$(4.151)$$

Det vil si at Cowells metode, $k=6$ er instabil. (Definisjon 4.4)

Størmers metode, $k=0,1$ og Cowells metode, $k=1$ er i praksis stabile metoder. For disse var det (tabell 4.5, 4.6):

$$\lambda^2 = ((r-2)^2)x^2 - \frac{(r-1)^2}{2} \quad (4.152)$$



$$(4.152a)$$

$$\lambda^2(0) = -\frac{(e^{\frac{6}{2}} - 1)^2}{2} \quad (4.152b)$$

$$= -16 \cdot \frac{e^3 - 1}{2} \approx -16 \cdot 2.718 \approx -43.5 \quad (4.152c)$$

Figur 4.9. Stabilitetskurve for Cowells metode, $k=6$.

Det betyr at ved beregningen av z^2 for Størmers metode, $k=0,1$ og i Cowells metode, $k=1,2,3$ ble imaginærdelen tilnærmet lik null. Dette tyder på at metodene i disse tilfelle er banestabile. Cowells metode, $k=0$ viste avvikende oppførsel. Fra tabell 4.6:

$$z_{0, \text{Cowell}}^2 = -\frac{(r-1)^2}{r^2} \quad (4.147)$$

Herav:

$$r^2 + 2z_0 r + 1 = 0 \quad (4.153a)$$

$$(1+z^2)r^2 - 2r + 1 = 0 \quad (4.148)$$

Løsning:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1+z^2)}}{2(1+z^2)} \quad (4.149a)$$

Når $r < 0$, vil det ikke være mulig å løse denne ligningen, da r ikke kan være negativ.

Men absoluttverdien til r betyr at disse metodene ikke kan ha stabile løsninger.

$$\left| r \right| = \frac{1 \pm z_i}{1+z^2} \quad (4.149b)$$

Cowells metode, $k=2$ og $k=3$ er også identiske. Fra tabell 4.6

Absoluttverdi:

$$\left| r \right| = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \quad (4.150)$$

Herav ser en at:

$$\lim_{|z^2| \rightarrow 0} |r| = 0$$

$$|z^2| \rightarrow 0$$

Det vil si at Cowells metode, $k=0$ er L-stabil. (Definisjon 4.4)

Størmers metode, $k=0$ og $k=1$ og Cowells metode, $k=1$ er i praksis identiske metoder. For disse har en (tabell 4.5, 4.6):

$$z^2 = -\frac{(r-1)^2}{r} \quad (4.151)$$

Setter $r = e^{i\theta}$:

$$z^2(\theta) = -\frac{(e^{i\theta}-1)^2}{e^{i\theta}} \quad (4.152a)$$

$$= -(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})^2 \quad (4.152b)$$

$$= 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (4.152c)$$

Det betyr altså at når $z^2 \in [0,4]$ vil minst en av røttene r i (4.151) ligge på enhetssirkelen. (4.152c) innsatt i (4.151) og ordning gir:

$$r^2 + (4\sin^2 \frac{\theta}{2} - 2)r + 1 = 0 \quad (4.153a)$$

eller

$$r^2 + 2\cos\theta \cdot r + 1 = 0 \quad (4.153b)$$

Løsning:

$$r = -\cos\theta \pm i \cdot \sin\theta \quad (4.154)$$

Når $\theta \neq n\pi$ fås altså to distinkte komplekskonjugerte røtter med absoluttverdi 1. Det betyr at disse metodene er banestabile på intervallet $(0,4)$.

Cowells metode, $k=2$ og $k=3$ er også identiske. Fra tabell 4.6 følger:

$$z^2 = -\frac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1} \quad (4.155a)$$

$$= -\frac{12(r-1)^2}{(r-1)^2+12r} \quad (4.155b)$$

Herav:

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{12} - \frac{r}{(r-1)^2} \quad (4.156)$$

Setter igjen $r = e^{i\theta}$. Det gir idet en benytter (4.152c):

$$\frac{1}{z^2(\theta)} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4\sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4.157)$$

Ordnet:

$$z^2(\theta) = \frac{12\sin^2 \frac{\theta}{2}}{3-\sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (4.158)$$

For $z^2 \in [0,6]$ vil minst en rot i (4.155a) ligge på enhetssirkelen. Hvis en setter (4.158) inn i (4.155a) fås (4.153b). Samme resonnement som ovenfor gir da at Cowells metode er banestabil på intervallet $(0,6)$.

Oppsummerer resultatene i følgende sats:

Sats 4.5. Størmers metode er banestabil når

$k = 0,1$. Intervall: $(0,4)$.

Cowells metode er banestabil når

$k = 1$. Intervall: $(0,4)$

$k = 2,3$. Intervall: $(0,6)$.

Cowells metode er L-stabil når

$k=0$.

5. UNDERSØKELSE AV ABSOLUTT STABILITET FOR DE TRIGONOMETRISK
TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

De trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder er på formen

$$\vec{u}_{n+1-v} = 2\cos Q \cdot \vec{u}_{n-v} - \vec{u}_{n-1-v} + \sum_{j=0}^k \sigma_j(Q, v) v^j (h^2 \vec{\phi}_n + Q^2 \vec{u}_n) \quad (5.1)$$

For disse metoder er det gjort tilsvarende undersøkelser av absolutt stabilitet som for Størmers og Cowells metoder i avsnitt 4.2. Også her antas $Q = Q(1 \times 1) = q$ for enkelthets skyld.

Testlikning:

$$y'' = -\lambda^2 y \quad (5.2)$$

(5.2) innsatt i (5.1) gir ($z^2 = -\lambda^2 h^2$):

$$r^{1-v} = 2\cos q \cdot r^{-v} - r^{-1-v} + \sum_{j=0}^k \sigma_j(q) (-z^2 + q^2) (1-r^{-1})^j \quad (5.3)$$

Herav:

$$z_{k,v}^2(q) = q^2 - \frac{r^2 - 2\cos q \cdot r + 1}{r^{1+v} \sum_{j=0}^k \sigma_j(q, v) (1-r^{-1})^j} \quad (5.4)$$

$v=0$: Trigonometrisk tilpasset Størmermetode.

$v=1$: Trigonometrisk tilpasset Cowellmetode.

Vi vet fra avsnitt 4.2 at Størmers metode, $k=0$ er banestabil på $(0, 4)$. La oss nå undersøke hvordan banestabiliteten påvirkes av den trigonometriske tilpasning. Fra (5.4) og (2.86):

$$z_{0,0}^2(q) = q^2 - \frac{r^2 - 2\cos q \cdot r + 1}{r \cdot \sigma_0} \quad (5.5a)$$

$$= q^2 - \frac{r^2 - 2\cos q \cdot r + 1}{r \cdot 2q^{-2} (1-\cos q)} \quad (5.5b)$$

Ordnet:

$$r^2 - 2[\cos q + q^{-2}(\cos q - 1)(z^2 - q^2)]r + 1 = 0 \quad (5.6)$$

Anta z^2 reell. For at metoden skal være banestabil, må røttene være distinkte og ligge på enhetssirkelen. Siden koeffisientene i (5.6) er reelle, er røttene komplekskonjugerte. Altså:

$$r_1 = ae^{i\theta}, \quad r_2 = ae^{-i\theta}$$

Fra (5.6) har en videre:

Tabel 5.1. $r_1 \cdot r_2 = a^2 e^{i\theta} e^{-i\theta} = a^2$, $n = 3(1)10$.

$$1. \quad r_1 \cdot r_2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

Velger $a = 1$.

$$2. \quad 2[\cos q + q^{-2}(\cos q - 1)(z^2 - q^2)] = r_1 + r_2 = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$

Kravet om at røttene skal være distinkte impliserer $\cos\theta \neq \pm 1$.

Det betyr at:

$$|\cos\theta| < 1$$

(5.7)

Herav:

$$|\cos q + q^{-2}(\cos q - 1)(z^2 - q^2)| < 1$$

(5.8)

Fra denne ulikheten fås:

$$0 < z^2 < \frac{2q^2}{1-\cos q}, \quad q \neq n \cdot 2\pi, \quad n \text{ naturlig tall.}$$

Definerer w :

$$w(q) \equiv \frac{2q^2}{1-\cos q}$$

(5.10)

og q_0 :

$$\left. \frac{dw}{dq} \right|_{q=q_0} \equiv 0$$

(5.11)

En finner at

$$w(q_0) = \frac{4q_0}{\sin q_0}$$

(5.12)

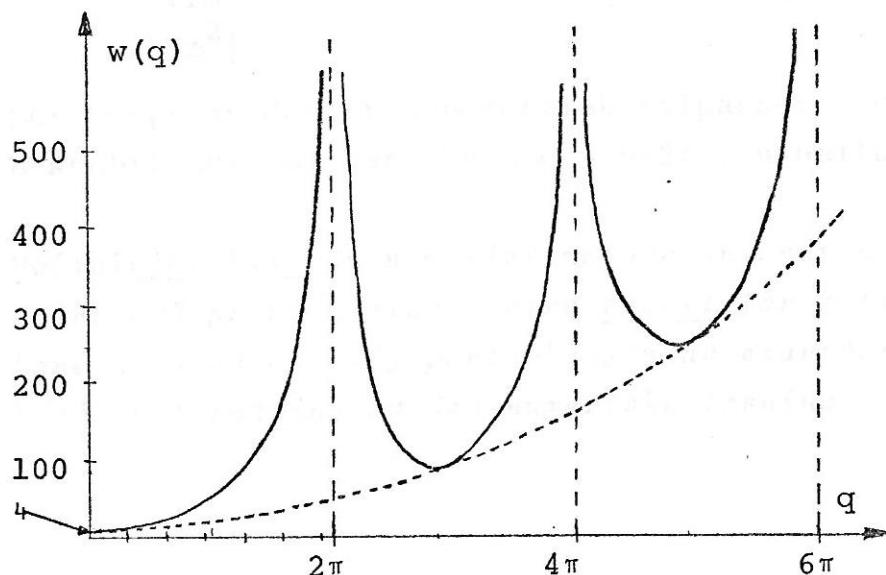
Betegner de ulike q_0 med $q_{0,n}$ slik at stabilitet for den

$$(n-1)2\pi < q_{0,n} < n \cdot 2\pi \text{ inneholder det, så kan en si at } (5.13)$$

$w(q_{0,n})$ er altså øvre endepunkt for minste banestabile område når q ligger i intervallet $((n-1)2\pi, n \cdot 2\pi)$.

Tabell 5.1. $q_{0,n}$ og $w(q_{0,n})$, $n = 1(1)10$.

n	$q_{0,n}$	$p(q_{0,n})$
1	0	4
2	8.9869	84.763
3	15.451	242.72
4	21.808	479.60
5	28.132	795.43
6	34.442	1190.2
7	40.743	1664.0
8	47.039	2216.7
9	53.332	2848.3
10	59.623	3558.9



Figur 5.1. Variasjon i banestabilt område for TTS₀.

I figur 5.1 er angitt hvordan det banestabile området for den trigonometrisk tilpassete Størmermetode, $k=0$ varierer med q . Med mindre nøyaktighetskrav forhindrer det, så kan en altså ta skritt på flere perioder uten å tape banestabilitet. Metoden integrerer eksakt dersom $\vec{y} \in \vec{F}_1(At) + \vec{p}_0(t)$. Hvis nå egenverdiene til A har stor variasjon i størrelsesorden, kan det være aktuelt å ta flere av de korteste periodene i ett skritt når en integrerer over den lengste perioden hvis en bare er interessert i de langsomste komponentene i et koplet system.

En finner tilsvarende resultater for de andre metodene som er banestabil for $q=0$.

Cowells metode, $k=0$ er L-stabil. Fra (5.4) ($k=0$ og $v=1$) og (2.91) følger:

$$z_{0,1}^2 = q^2 - \frac{r^2 - 2\cos q \cdot r + 1}{r^2(2q^2 - 2(1-\cos q))} \quad (5.14)$$

Ordnet:

$$r^2[2(z^2 - q^2)q^{-2}(1-\cos q) + 1] - 2\cos q \cdot r + 1 = 0 \quad (5.15)$$

Herav:

$$|r| = \sqrt{\frac{4\cos^2 q + 4\cos^2 q - 8(z^2 - q^2)q^{-2}(1-\cos q)}{4(z^2 - q^2)q^{-2}(1-\cos q)}} \quad (5.16)$$

En har da at:

$$\lim_{|z^2| \rightarrow \infty} |r| = 0 \Leftrightarrow q^{-2}(1-\cos q) \neq 0 \Leftrightarrow q \neq n \cdot 2\pi$$

Det betyr at den trigonometrisk tilpassete Cowellmetode er L-stabil hvis og bare hvis $q \neq n \cdot 2\pi$, n heltall.

Definisjon 5.1. En numerisk metode anvendt på et ordinært startverdiproblem sies å være stabil for dette problem hvis og bare hvis en endelig perturbasjon av startverdiene gir en begrenset endring av den numeriske løsning.

I figurene 5.2-9 er plottet stabilitetskurver for TTS($k=4$) og TTC($k=4$) for fire ulike tilpasninger: $q = n\frac{2\pi}{5}$, $n=1(1)4$.

Det framgår av disse figurene at metodene er absolutt stabile når z^2 er litt større enn q^2 . Dette betyr at en for problemer av typen

$$\dot{\vec{y}}'' = -D^2 \vec{y} \quad (5.17)$$

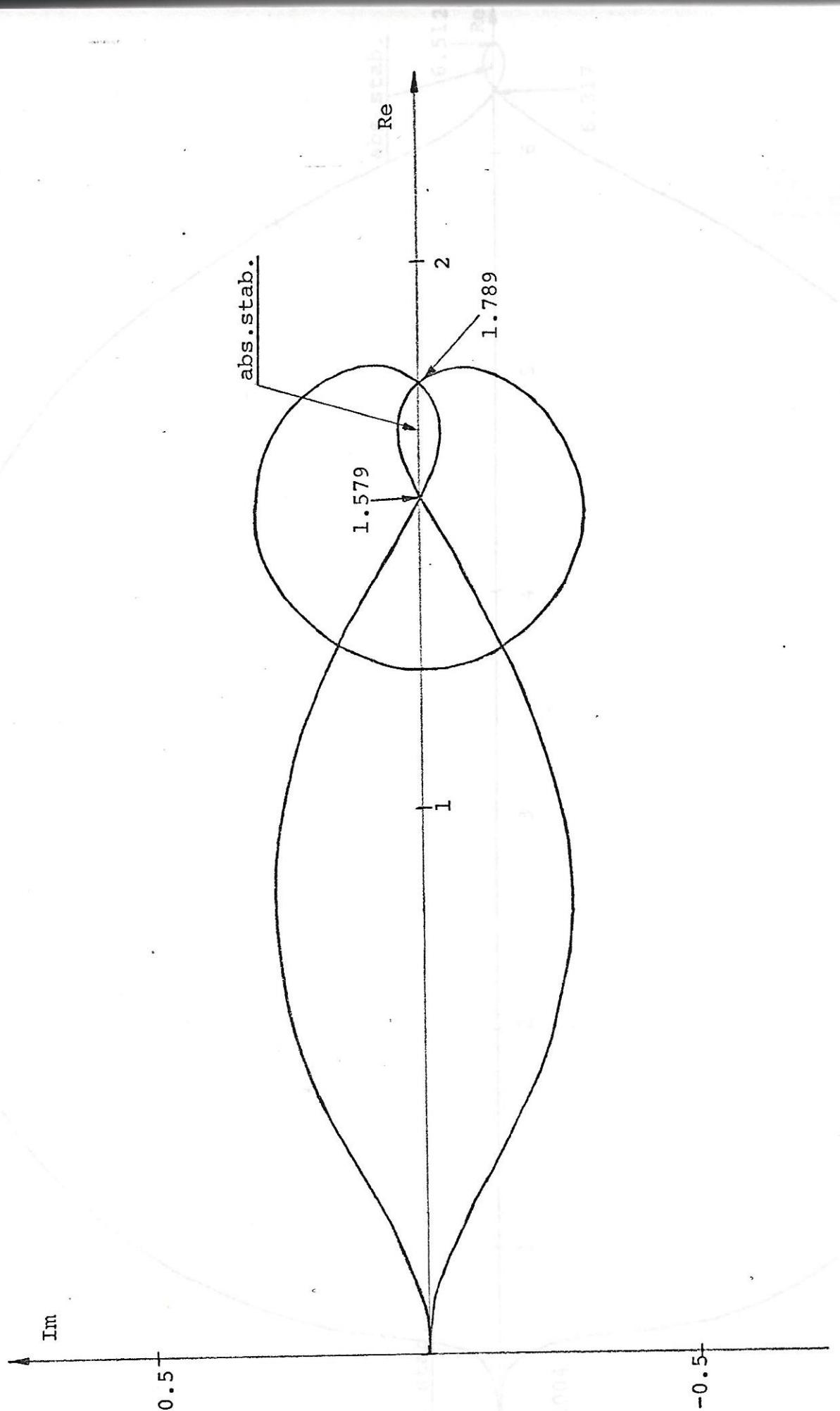
hvor D er en reell diagonalmatrise, burde tilpasset metoden med

$$A^2 = (1-\varepsilon)D^2, \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \text{ liten} \quad (5.18)$$

for å sikre stabilitet når en integrerer med fast skritt.

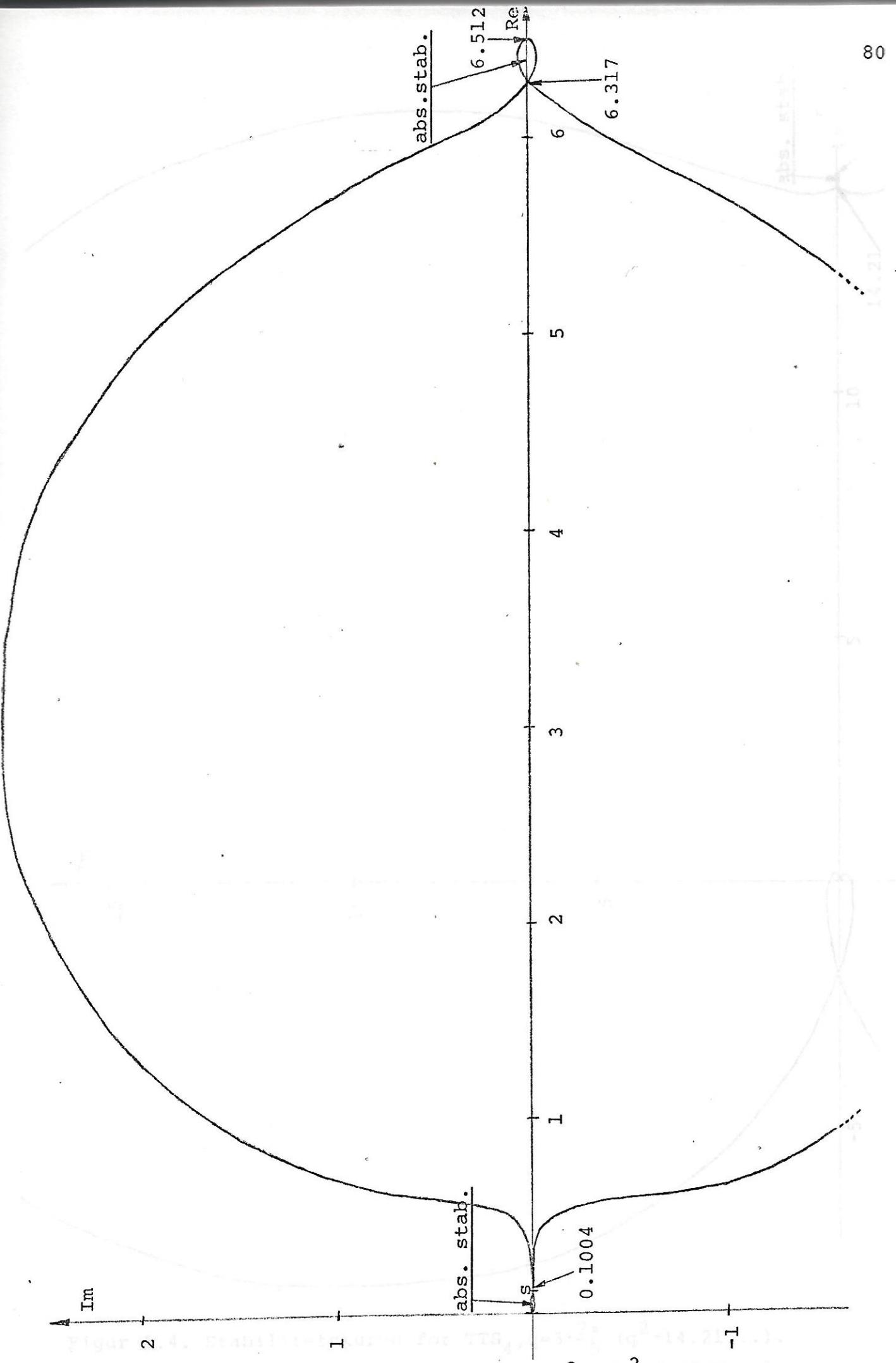
Hvordan stabiliteten ved løsning av et generelt problem og med varierende skritt avhenger av tilpasningen, er det naturligvis vanskelig å si noe sikkert om. En bør imidlertid i alle fall være oppmerksom på at den "best mulige" tilpasning ikke nødvendigvis gir den mest effektive algoritme.

Vi merker oss dessuten at $TTC_4, q = \frac{4}{5} \cdot 2\pi$ er L-stabil.

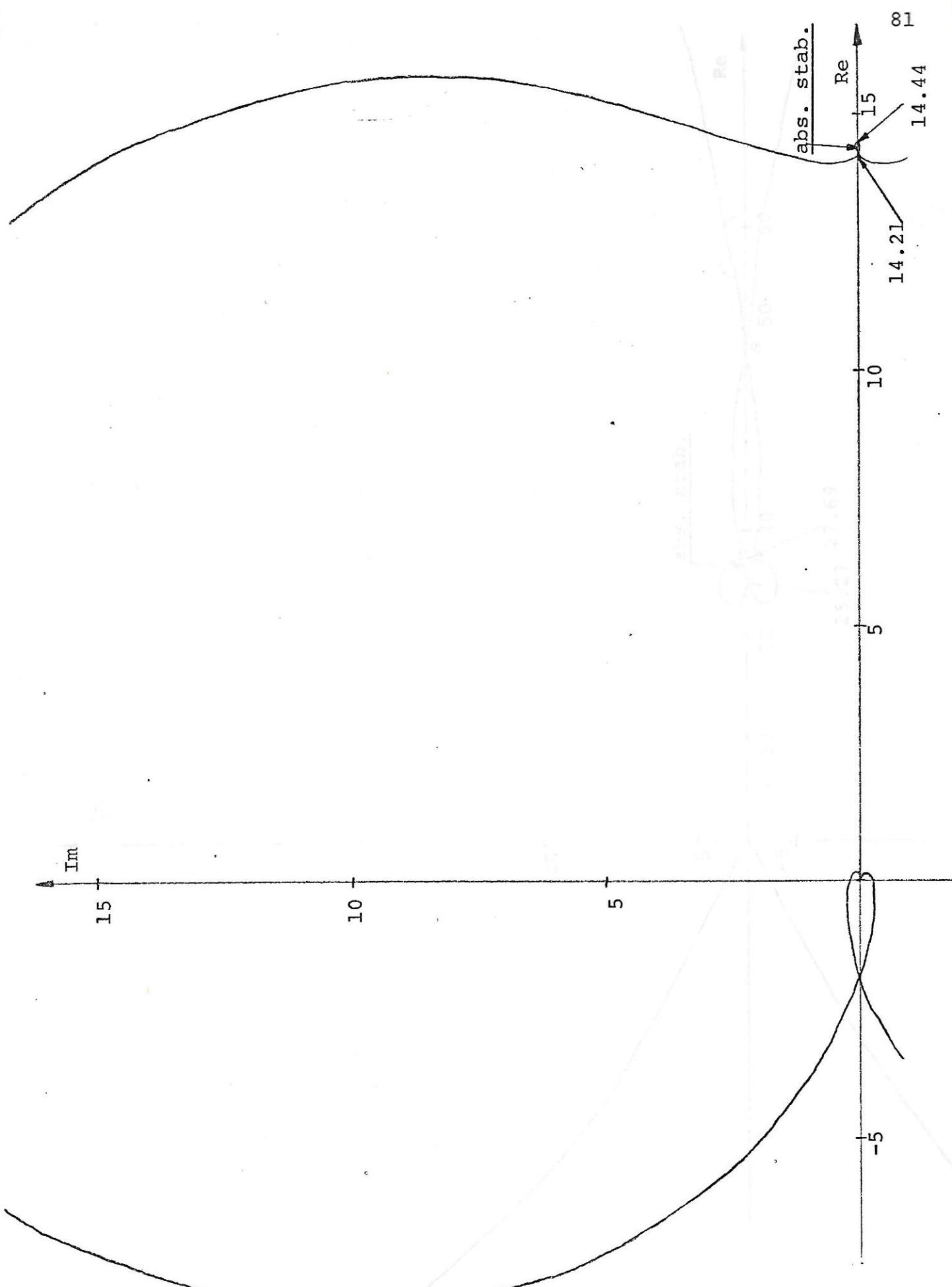


Figur 5.2. Stabilitetskurve for TTS₄, $q = \frac{2\pi}{5}$ ($q^2 = 1.579\dots$).

Figur 5.3. Stabilitetskurve for TTS₄, $q = 2 \cdot \frac{3\pi}{5}$ ($q^2 = 4.318\dots$).

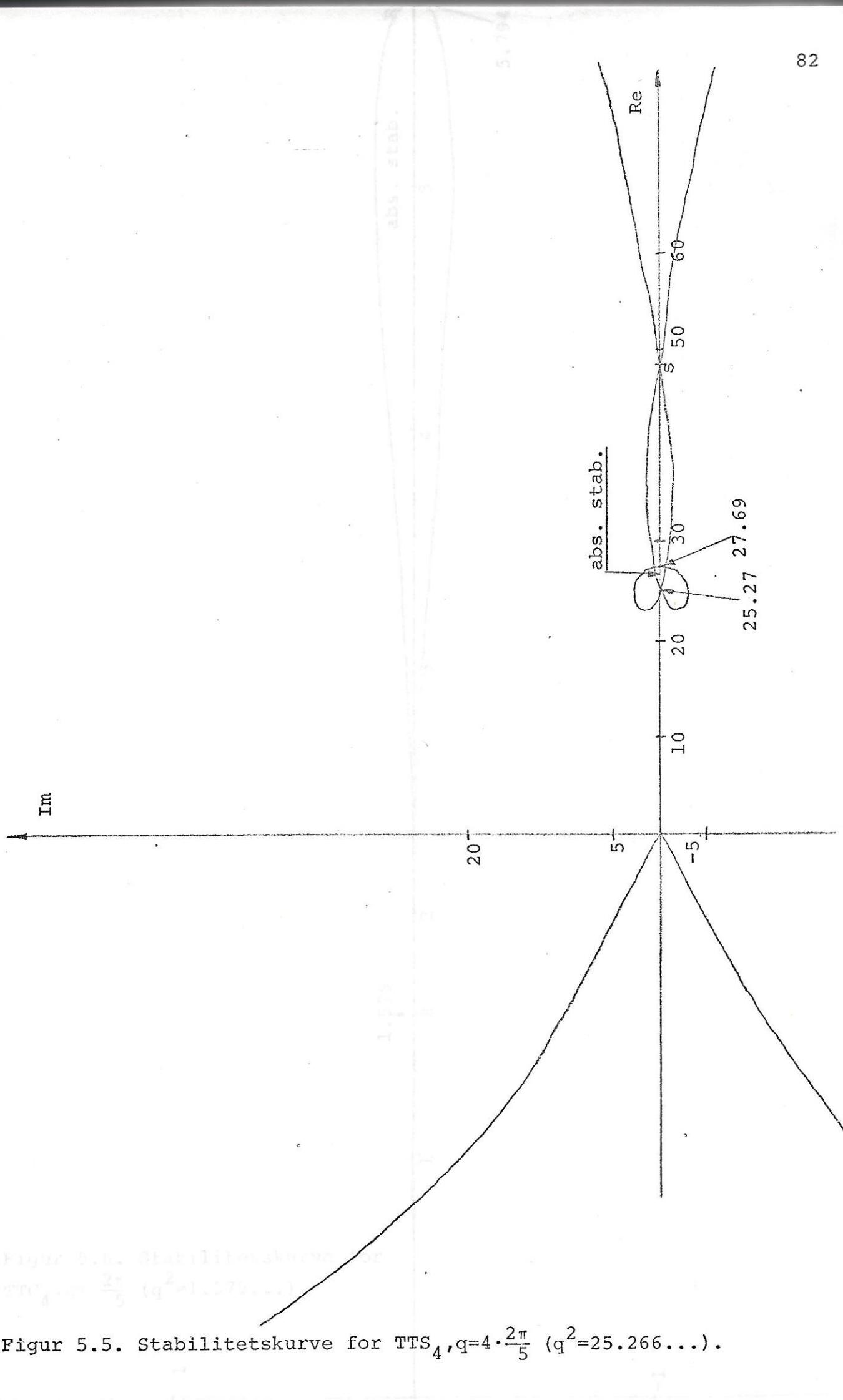


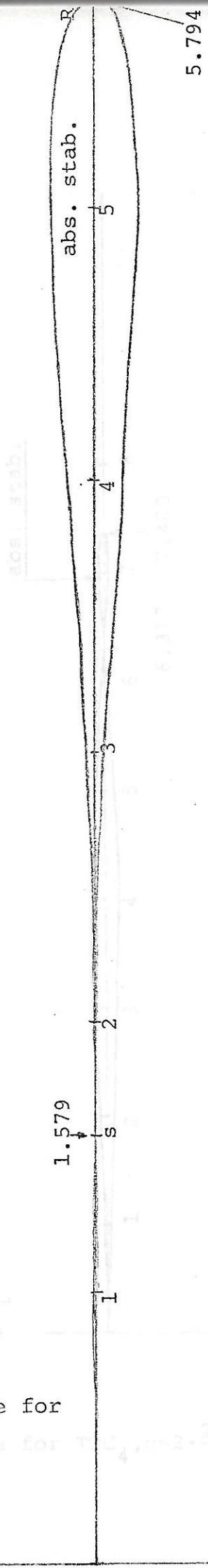
Figur 5.3. Stabilitetskurve for TTS_4 , $q = 2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ ($q^2 = 6.3165\dots$).



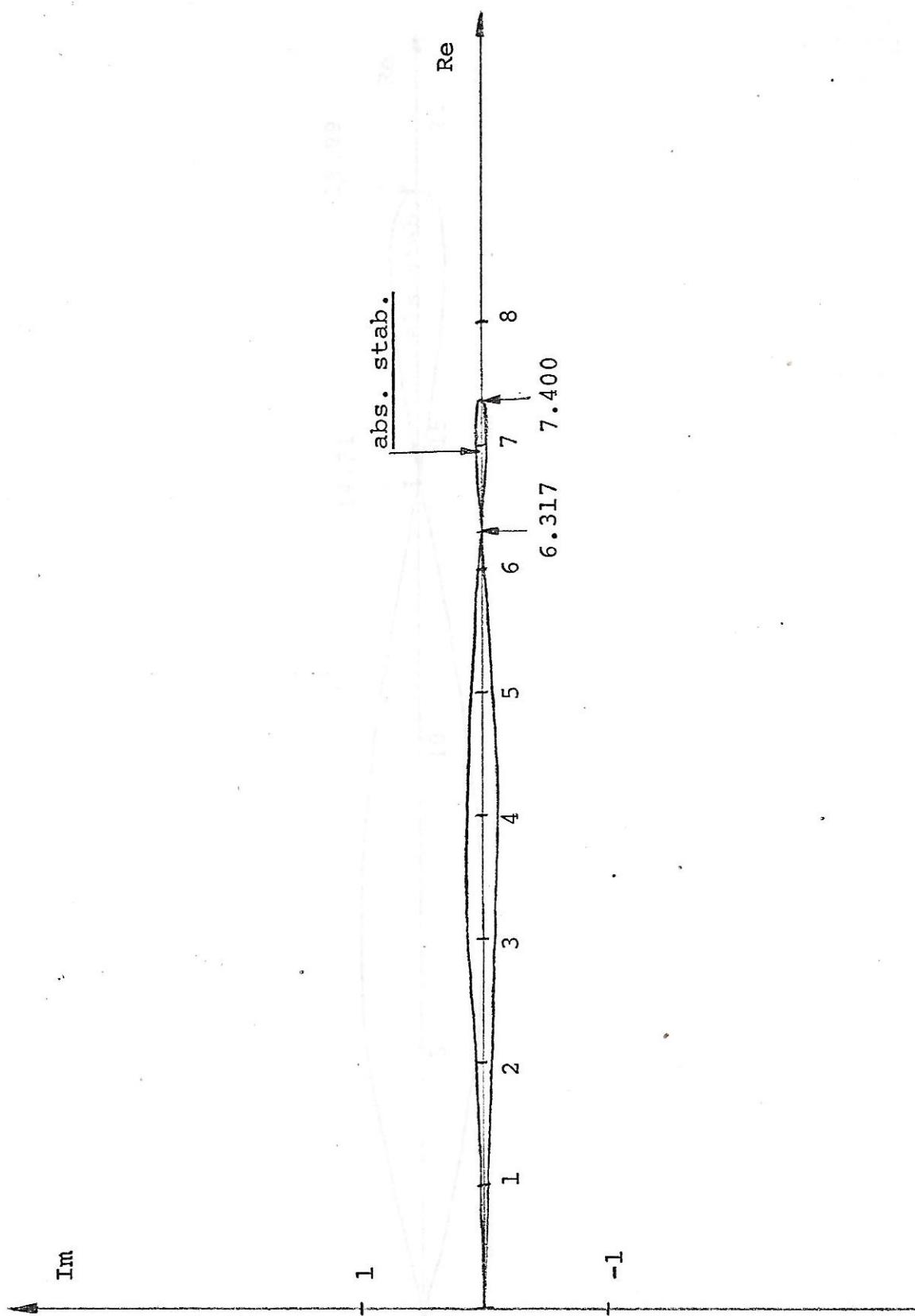
Figur 5.4. Stabilitetskurve for TTS₄, $q=3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ ($q^2=14.21\dots$).

Figur 5.5. Stabilitetskurve for TTS₄, $q=4 \cdot \frac{2\pi}{5}$ ($q^2=25.21\dots$).

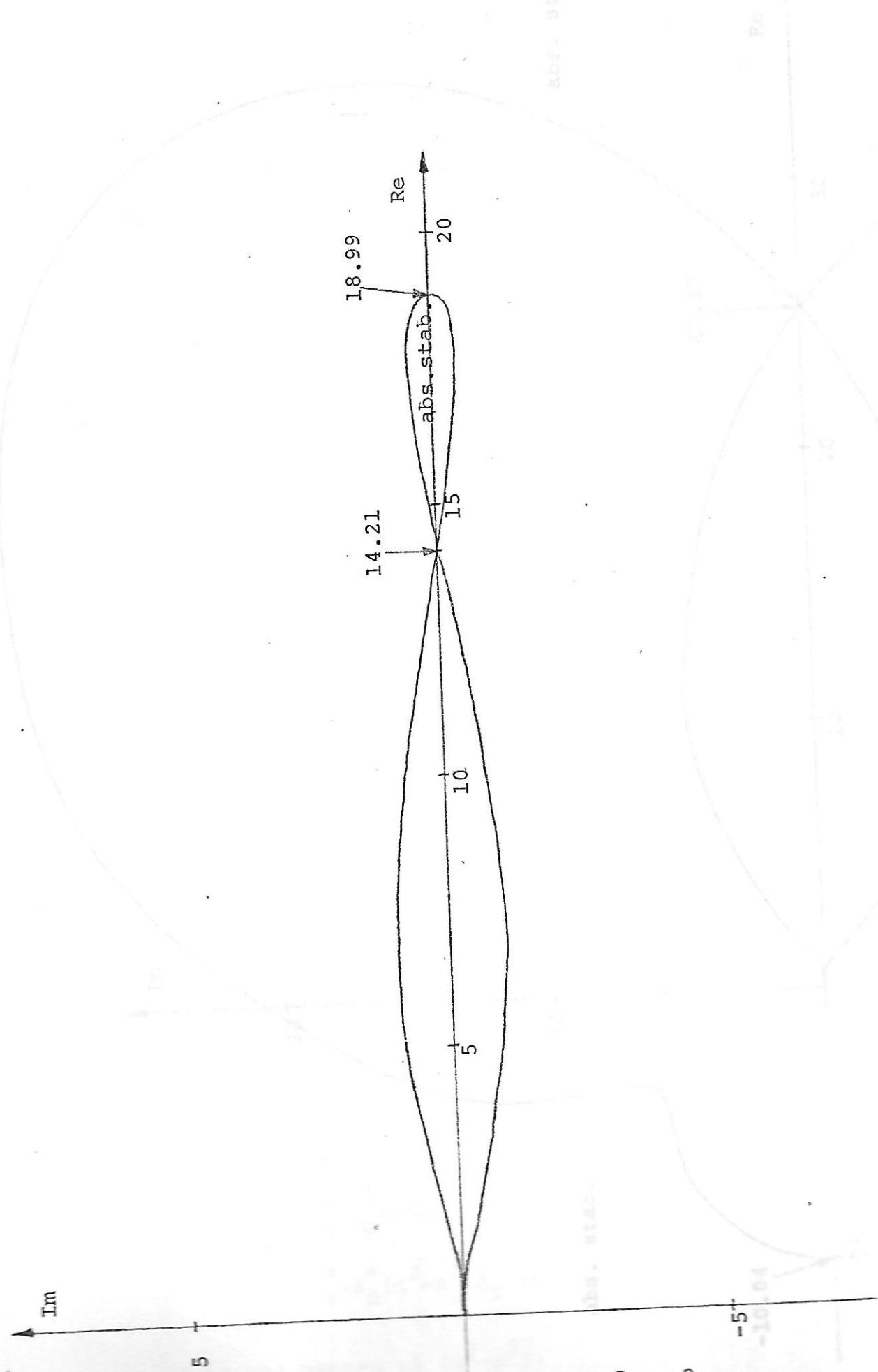




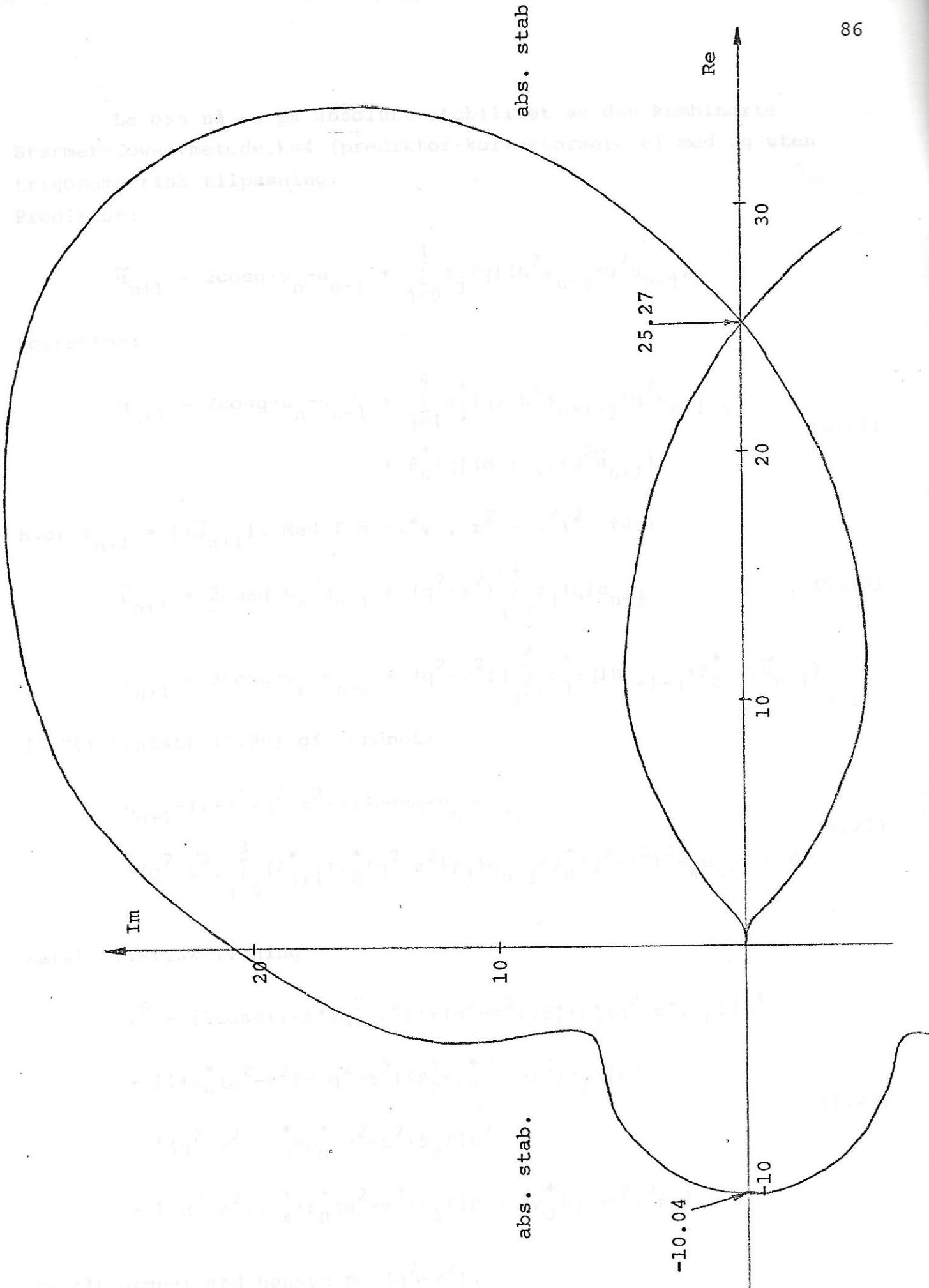
Figur 5.6. Stabilitetskurve for
 $TTC_4, q = \frac{2\pi}{5}$ ($q^2 = 1.579\dots$).



Figur 5.7. Stabilitetskurve for TTC_4 , $q=2 \cdot \frac{2\pi}{5}$ ($q^2=6.3165\dots$).



Figur 5.8. Stabilitetskurve for TTC_4 , $q=3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ ($q^2=14.21\dots$).



Figur 5.9. Stabilitetskurve för TTC_4 , $q=4 \cdot \frac{2\pi}{5}$, ($q^2=25.266\dots$).

La oss nå se på absolutt stabilitet av den kombinerte Størmer-Cowellmetode, $k=4$ (prediktor-korrektormetode) med og uten trigonometrisk tilpasning.

Prediktor:

$$\tilde{u}_{n+1} = 2\cos q \cdot u_n - u_{n-1} + \sum_{j=0}^4 \beta_j(q) (h^2 \phi_{n-j} + q^2 u_{n-j}) \quad (5.18)$$

Hensyn:

Korrektor:

$$u_{n+1} = 2\cos q \cdot u_n - u_{n-1} + \sum_{j=1}^4 \beta_j^*(q) (h^2 \phi_{n+1-j} + q^2 u_{n+1-j}) + \beta_0^*(q) (h^2 \tilde{\phi}_{n+1} + q^2 \tilde{u}_{n+1}) \quad (5.19)$$

hvor $\tilde{\phi}_{n+1} = f(\tilde{u}_{n+1})$. Med $f = -\lambda^2 y$, $z^2 = h^2 \lambda^2$ fås:

$$\tilde{u}_{n+1} = 2\cos q \cdot u_n - u_{n-1} + (q^2 - z^2) \sum_{j=0}^4 \beta_j(q) u_{n-j} \quad (5.20)$$

$$u_{n+1} = 2\cos q \cdot u_n - u_{n-1} + (q^2 - z^2) \left(\sum_{j=1}^4 \beta_j^*(q) u_{n+1-j} + \beta_0^*(q) \tilde{u}_{n+1} \right) \quad (5.21)$$

(5.21) innsatt (5.20) gir ordnet:

$$u_{n+1} - (1 + \beta_0^*(q^2 - z^2)) (2\cos q \cdot u_n - u_{n-1}) - (q^2 - z^2) \sum_{j=0}^3 (\beta_{j+1}^* + \beta_0^*(q^2 - z^2) \beta_j) u_{n-j} - \beta_0^*(q^2 - z^2)^2 \beta_4 u_{n-4} = 0 \quad (5.22)$$

Karakteristisk likning:

$$r^5 - [2\cos q (1 + \beta_0^*(q^2 - z^2)) + (q^2 - z^2) (\beta_1^* + \beta_0^*(q^2 - z^2) \beta_1)] r^4 + [1 + \beta_0^*(q^2 - z^2) - (q^2 - z^2) (\beta_2^* + \beta_0^*(q^2 - z^2) \beta_2)] r^3 - [(q^2 - z^2) (\beta_3^* + \beta_0^*(q^2 - z^2) \beta_3)] r^2 - [(q^2 - z^2) (\beta_4^* + \beta_0^*(q^2 - z^2) \beta_4)] r - [\beta_0^*(q^2 - z^2)^2 \beta_4] = 0 \quad (5.23)$$

(5.23) ordnet med hensyn på $(q^2 - z^2)$:

$$\begin{aligned}
 & [\beta_0^*(\beta_0 r^4 + \beta_1 r^3 + \beta_2 r^2 + \beta_3 r + \beta_4)](q^2 - z^2)^2 \\
 & + [(\cos q \cdot \beta_0^* + \beta_1^*)r^4 + (-\beta_0^* + \beta_2^*)r^3 + \beta_3^* r^2 + \beta_4^* r](q^2 - z^2) \\
 & - [r^5 - 2\cos q \cdot r^4 + r^3] = 0
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Herav:

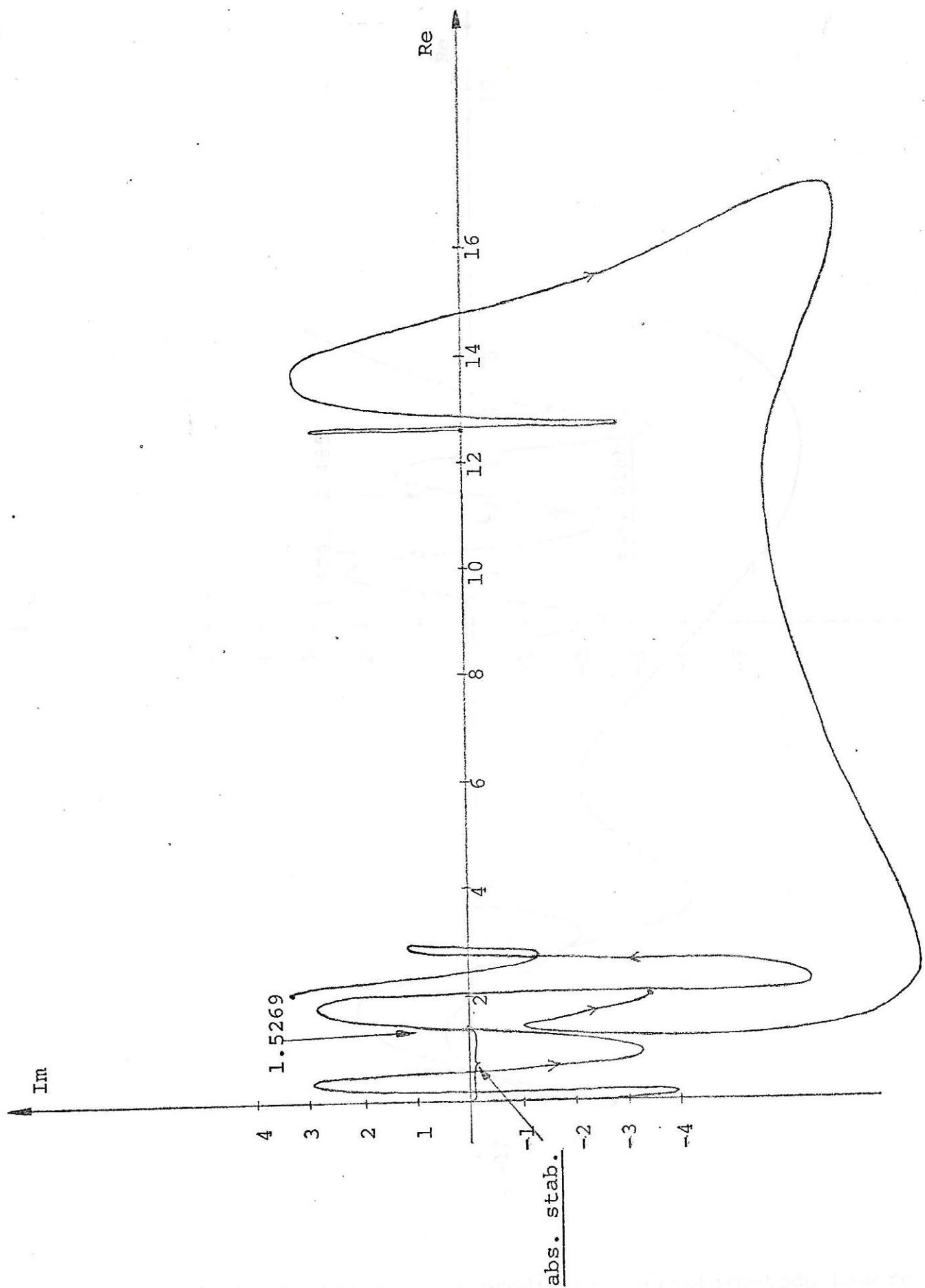
$$z^2 = q^2 - \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0 c_2}}{2c_2}$$

hvor c_i er koeffisienten foran $(q^2 - z^2)^i$, $i = 0, 1, 2$.

Stabilitetskuren svarende til enhetssirkelen $e^{i\theta}$ i øvre r-halvplanet ($\theta \in [0, \pi]$) for dette tilfelle er plottet i figurene 5.10 ($q=0$) og 5.11 ($q=\frac{2\pi}{5}$), og de ulike intervallene er undersøkt med hensyn til absolutt stabilitet. Vi ser av figurene at metoden uten tilpasning ($q=0$) (svarer til SC4) er absolutt stabil på $(0, 1.5269)$. Med $q=\frac{2\pi}{5}$ (PERDIAG) er metoden absolutt stabil på $(1.5791, 2.4850)$ ($q^2=1.5791\dots$).

Stabilitetsegenskapene likner altså mest på de tilsvarende for korrektoren, noe som virker rimelig. Lengden av det absolutte stabilitetsintervall er imidlertid redusert.

Stabilitetsdiskusjonen omkring TTS₄ og TTC₄ separat skulle ha gyldighet også i dette tilfelle.

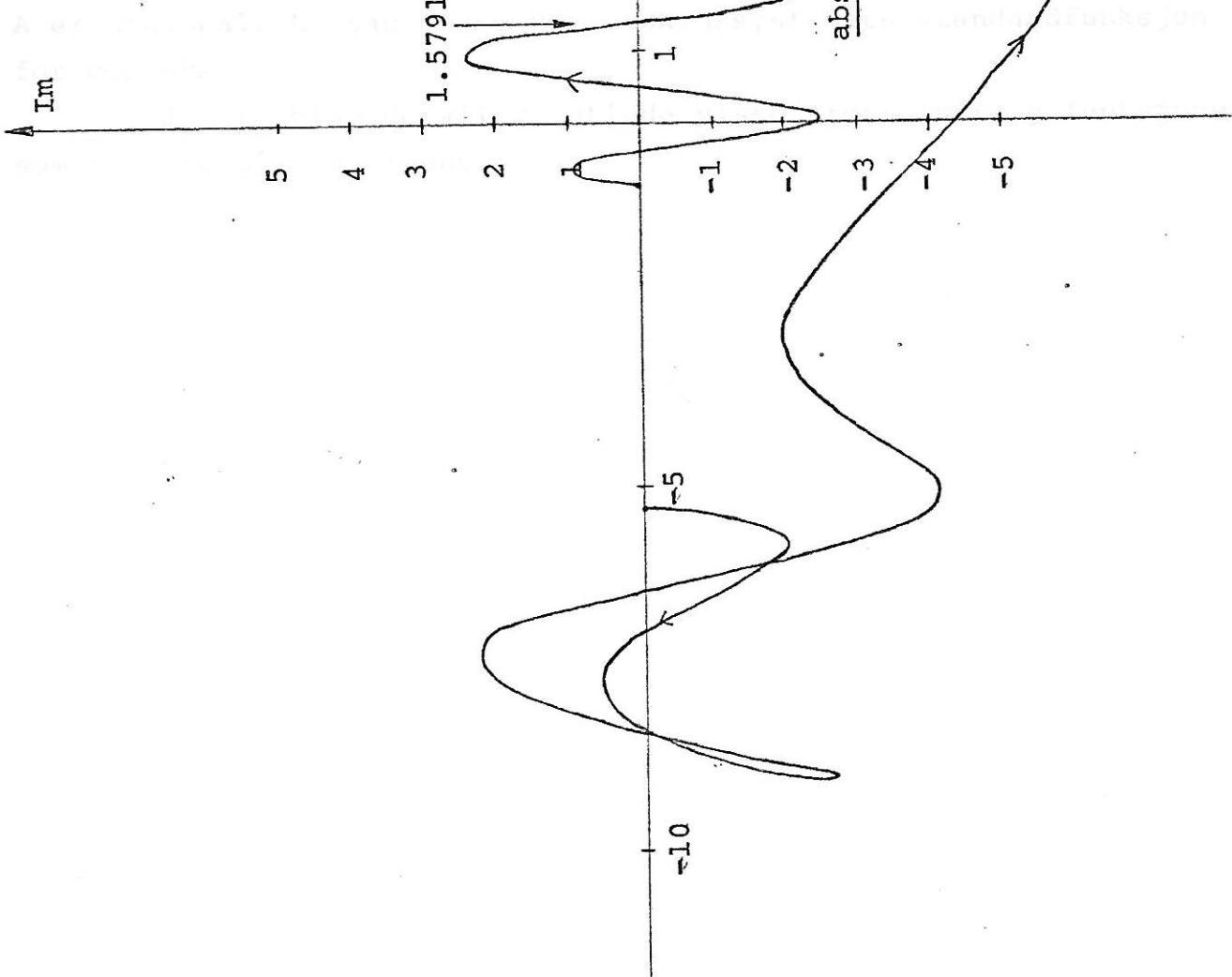


Figur 5.10. Stabilitetskurve for prediktor-korrektormetoden basert på Størmers (prediktor) og Cowells (korrektør) metoder, $k=4$.

6. RUTINER BYGD PÅ DE TRIDIAGONALISKE TILPÅNDELE STØRMER- OG COWELL-METODENE

Vi ønsker i løpet av rutinen å passe seg ned på datamaskinen tilgjengelig tilgjengelige beregningstilhøyrer (dette kan ikke bli hittende med alle de opprinnelige tilhøyrerne, men vi kan bruke de senere). Vi bruker derfor TTS₄ og TTC₄ med maksimalt korrektørskifte 2. Vi bruker i PER og PERKOMM metoden prediktoren og TTC₄ som korrektør, og tilsvarende for TTC₄. Det betegner en tilhørsrelasjon til tidsavset størmertilhøret, TTC₄ er tilhørsrelativ til tidsavset størmertilhøret.

I denne metoden har vi et $\frac{2\pi}{5}$ -faseomslag i tilhørsrelatet til systemet. I PER kan det også være et bokstav om korrektør, dvs. tilhørsrelasjon hvor korrektøren er den som skal tilhøres. Vi kan da velge TTC₄ som korrektør, og da får vi en tilhørsrelasjon til tidsavset Jacobi-metoden.



Figur 5.11. Stabilitetskurve for prediktor-korrektormetoden basert på TTS₄ (prediktor) og TTC₄ (korrektør) med $q = \frac{2\pi}{5}$ ($q^2 = 1.5791\dots$).

6. RUTINER BYGD PÅ DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

Vi ønsker å lage to rutiner som baserer seg på de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder (disse rutinene blir kalt PER og PERDIAG) og (til sammenlikning) en rutine som bruker de vanlige Størmer- og Cowellmetoder (SC4). Vi bruker i PER og PERDIAG TTS, $k=4$ som prediktor og TTC, $k=4$ som korrektor, og tilsvarende for SC4. TTS betegner en trigonometrisk tilpasset Størmermetode og TTC en trigonometrisk tilpasset Cowellmetode.

I rutinen PER bruker vi som $-A^2$ Jacobimatrisen til systemet. I PERDIAG vil vi som $-A^2$ benytte en diagonal matrise. I de tilfelle hvor Jacobimatrisen er diagonal brukes denne. I andre tilfelle velges $-A^2$ skjønnsmessig, men helst slik at den approksimerer Jacobimatrisen sånn noenlunde.

I PERDIAG trenger en ikke å approksimere $\cos(hA)$ fordi A er diagonal. En kan bruke datamaskinssystemets standardfunksjon for cosinus.

I det følgende vil vi utlede visse størrelser og funksjoner som skal inngå i rutinene.

6.1. CosQ-approksimasjon.

I PER må cosQ, Q=hA approksimeres. En kan velge i klassen av rasjonale approksimasjoner:

$$c(Q) = \left(\sum_{i=0}^{m_n} b_i Q^i \right)^{-1} \sum_{i=0}^{m_t} a_i Q^i \quad (6.1)$$

Hvis $b_i \neq 0$, $i \geq 1$ må en foreta en invertering for hver beregning av cosQ. Dette er ikke særlig ønskelig. Derfor vil vi bruke en polynomisk approksimasjon.

Med k=4 følger fra Teorem 3.1:

$$c(Q) = \cos Q + O(Q^{\alpha_4+2}) \quad (6.2)$$

Hvis metodens orden skal bevares. Fra Lemma 3.1 har en at $\alpha_4 = 6$. Det betyr at en må velge en cosQ-approksimasjon C(Q) slik at:

$$\cos Q = c(Q) + O(Q^8) \quad (6.3)$$

Omkring Q=0 er den beste polynomiske approksimasjon til cosQ den trunkerte Maclaurinrekke:

$$c(Q) = I - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^4}{24} - \frac{Q^6}{720} \quad (6.4)$$

Denne vil vi bruke i PER.

6.2. Begrensning av skrittet h på grunn av cosQ-approksimasjonen.

En har at:

$$\cos Q = 1 - \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{24}Q^4 - \frac{1}{720}Q^6 + \frac{1}{8!}Q^8 + O(Q^{10}) \quad (6.5)$$

$$= C(Q) + \frac{1}{8!}Q^8 + O(Q^{10}) \quad (6.6)$$

Når $C(Q)$ brukes i stedet for $\cos Q$ i integrasjonsformlene, må en påse at denne approksimasjonsfeilen ikke blir vesentlig større enn feilen integrasjonsformlene gir uten cosQ-approksimasjon.

Definisjon 6.1. Gitt en metode

$$u_{n+1} = T(u_n, u_{n-1}, \dots, u_{n-k}).$$

Lokal trunkeringsfeil i x_{n+1} for metoden defineres da som

$$d_{n+1} = T(y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k}) - y_{n+1}.$$

I alle rutinene inngår en størrelse eps som en vil prøve å holde (lokal trunkeringsfeil)/ h under. For PER har en:

Prediktor:

$$\vec{\tilde{u}}_{n+1} = 2 \cdot C(Q) \vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \sigma_j(Q) \nabla^j \vec{G}_n \quad (6.7)$$

Korrektor:

$$\vec{u}_{n+1} = 2 \cdot C(Q) \vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \sigma_j(Q) \nabla^j \vec{G}_{n+1} \quad (6.8)$$

$$\text{hvor } \vec{G}_{n+1} = \vec{f}(t_{n+1}, \vec{\tilde{u}}_{n+1}) + A^2 \vec{u}_{n+1}.$$

Antar nå som et estimat at feilen i $2 \cdot C(Q) \vec{u}_n \cdot h$ bidrar like mye til den totale lokale trunkeringsfeil som cosQ-approksimasjonsfeilen i summene og feilen i integrasjonsformelen med $C(Q) = \cos Q$ til sammen. En har da:

$$\| 2\cos Q \cdot \vec{u}_n - 2C(Q) \vec{u}_n \|_\infty \leq \frac{1}{2} \text{eps} \quad (6.9)$$

Fra (6.6) følger da:

$$\left\| \frac{2}{8!} h^8 A^8 \right\|_{\infty} \cdot \| u_n \|_{\infty} \lesssim \frac{1}{2} \text{eps} \quad (6.10)$$

$$h^8 \lesssim \frac{8! \cdot \text{eps}}{4 \| A^8 \|_{\infty} \cdot \| u_n \|_{\infty}}$$

$$\approx \frac{8! \cdot \text{eps}}{4 \| A^2 \|_{\infty}^4 \cdot \| u_n \|_{\infty}} \quad (6.11)$$

$$h \lesssim \sqrt[8]{\frac{8! \cdot \text{eps}}{4 \| u_n \|_{\infty}}} / \sqrt{\| A^2 \|_{\infty}} \quad (6.12)$$

Men

$$\| A^2 \|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \quad (6.13)$$

Altså:

$$h \lesssim \frac{\sqrt[8]{8! \cdot \text{eps}}}{\sqrt{\left\| \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} \\ \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}} \equiv h_{\text{maks}} \quad (6.14)$$

En ønsket fordobling av skrittet godtas hvis og bare hvis

$$2h < h_{\text{maks}}. \quad (6.15)$$

6.3. Feilestimering for prediktor-korrektormetode basert på TTS_4 og TTC_4 .

I dette avsnittet regnes skalart. $\tilde{\phi}_{n+1}$ betegner $f(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})$.
Prediktering:

$$\tilde{u}_{n+1} = 2\cos q \cdot u_n - u_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j(q) (\phi_{n-j} + A^2 u_{n-j}) \quad (6.16)$$

Metodens lokale trunkeringsfeil er $O(h^{k+3}) = O(h^7)$. Det betyr at:

$$y_{n+1} = 2\cos q \cdot y_n - y_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j(q) (f_{n-j} + A^2 y_{n-j}) + C_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.17)$$

Korrigering:

$$u_{n+1} = 2\cos q \cdot u_n - u_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^4 \beta_j^*(q) (\phi_{n+1-j} + A^2 u_{n+1-j}) \\ + h^2 \beta_0^*(q) (\tilde{\phi}_{n+1} + A^2 \tilde{u}_{n+1}) \quad (6.18)$$

$$y_{n+1} = 2\cos q \cdot y_n - y_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j^*(q) (f_{n+1-j} + A^2 u_{n+1-j}) \\ + C_7^* (q) y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.19)$$

Definisjon 6.2. Den globale trunkeringsfeil for en numerisk metode er differansen mellom numerisk og eksakt løsning når en ser bort fra avrundingsfeil.

Den globale trunkeringsfeil e_n til metoden er $O(h^{k+1}) = O(h^5)$ ifølge [1, Chap. 6]. Definerer derfor $\epsilon(t)$ ved:

$$h^5 \epsilon(t_n) + O(h^6) \equiv e_n = u_n - y_n \quad (6.20)$$

Antar at $\epsilon(t)$ er kontinuerlig deriverbar. En har da fra (6.16) og (6.17):

$$\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q \cdot e_n + e_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j(q) (\phi_{n-j} - f_{n-j} + A^2 (u_{n-j} - y_{n-j})) \\ - C_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.21)$$

$$= 2\cos q \cdot e_n - e_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j^*(q) (f_y(\tau_{n-j}) \cdot e_{n-j} + A^2 e_{n-j}) - c_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.22)$$

hvor τ_n er slik at $y(\tau_n) \in [u_n, y_n]$ og $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$.
Tilsvarende fra (6.18) og (6.19):

$$u_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q \cdot e_n - e_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^4 \beta_j^*(q) (f_y(\tau_{n+1-j}) \cdot e_{n+1-j} + A^2 e_{n+1-j}) \quad (6.24)$$

$$+ h^2 \beta_0^*(q) (f_y(\tau_{n+1}) + A^2) (\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1}) - c_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8)$$

En har at:

$$\epsilon(t_{n-j}) = \epsilon(t_n) + O(h) \quad (6.25)$$

$$\epsilon(t_{n+1-j}) = \epsilon(t_n) + O(h) \quad (6.26)$$

$$y(\tau_{n-j}) = y(t_n) + O(h) \quad (6.27)$$

$$f_y(\tau_{n-j}) = f_y(t_n) + O(h) \quad (6.28)$$

Videre har en at:

$$\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} + u_{n+1} - y_{n+1} \quad (6.29)$$

$$= Ch^7 + e_{n+1} \quad (6.30)$$

$$= h^5 \epsilon(t_{n+1}) + O(h^6) \quad (6.31)$$

Herav kan en forenklet sette:

$$\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q \cdot e_n - e_{n-1} + h^7 \sum_{j=0}^4 \beta_j^*(q) (f_y(t_n) + A^2) \epsilon(t_n) - c_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.32)$$

$$u_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q \cdot e_n - e_{n-1} + h^7 \sum_{j=0}^4 \beta_j^*(q) (f_y(t_n) + A^2) \epsilon(t_n) - c_7^* y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.33)$$

A finne et godt estimat på den globale trunkeringsfeil.

Subtraherer (6.32) fra (6.33):

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1} &= h^7 \sum_{j=0}^4 (\beta_j^*(q) - \beta_j(q)) (f_y(t_n) + A^2) \epsilon(t_n) \\ &\quad - (C_7^* - C_7) y^{(7)} h^7 + O(h^8) \end{aligned} \quad (6.34)$$

I følge kapittel 2 er metoden slik at den integrerer eksakt (bortsett fra avrundingsfeil) problemer av typen

$$y'' + A^2 y = p_4(t) \quad (6.35)$$

når A^2 er konstant. Spesielt integrerer den eksakt når $p_4(t) \triangleq 1$.

En kan da sette:

$$y_{n+1} - 2\cos q \cdot y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j(q) \cdot 1 \quad (6.36)$$

$$y_{n+1} - 2\cos q \cdot y_n + y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^4 \beta_j^*(q) \cdot 1 \quad (6.37)$$

Herav følger at:

$$\sum_{j=0}^4 \beta_j(q) = \sum_{j=0}^4 \beta_j^*(q) \quad (6.38)$$

(6.38) innsatt i (6.34) gir da forenklet:

$$u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1} = -(C_7^* - C_7) y^{(7)} h^7 + O(h^8) \quad (6.39)$$

En har da:

$$y^{(7)} h^7 = \frac{u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}}{C_7^* - C_7} + O(h^8) \quad (6.43)$$

Lokal trunkeringsfeil for metoden følger da med (6.43) innsatt i (6.33):

$$d_{n+1} = C_7^* y^{(7)} h^7 + O(h^8) = \frac{C_7^*}{C_7^* - C_7} (u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) + O(h^8) \quad (6.44)$$

Fra [1, s.297]: $C_7 = \frac{3}{40}$, $C_7^* = -\frac{1}{240}$.

Herav:

$$d_{n+1} = -\frac{1}{19} (u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) + O(h^8) \quad (6.45)$$

6.4. Stamme til å finne et godt estimat på den globale trunkeringsfeil er generelt meget vanskelig. I vårt tilfelle ville det naturlige kanskje være å bruke

$e_n \sim C \cdot \frac{d_n}{h^2}$ startmetoden til Flerekittsmetoden. Som slik startmetoden brukes

der C velges gjennom eksperimenter slik at den reelle globale feil kommer under ϵ_{ps} . Det er imidlertid grunn til å tro at C varierer så sterkt fra problem til problem at en ofte kommer ut for tilfelle der den globale feil med en fast C som skal gjelde for et vidt spektrum av problemer blir grovt overestimert. En får en for nøyaktig løsning og må betale dyrt for ekstra sifre som en ikke har bruk for eller ikke kan ha tillit til, eller en får ikke noe resultat i det hele tatt. Vi vil derfor i rutinene i stedet

bruke $\frac{d_n}{h}$ som "estimat" på global trunkeringsfeil.

$$\hat{\psi}_{n+1} = \hat{\psi}_n + \frac{h}{12} (2\hat{\psi}_1 - 12\hat{\psi}_2 + 17\hat{\psi}_3 - 12\hat{\psi}_4)$$

De problemet vi skal løse er imidlertid gitt på autonome form, dvs. det omvinces til ikkeautonom form ved å utvide til en ekstra tilst:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}$$

Bered:

$$\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix}$$

$$\hat{\psi}' = \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1' \\ \vdots \\ \hat{x}_n' \end{pmatrix} = \hat{\psi}'(t)$$

Definisjonen til \hat{x}_1' , \hat{x}_2' , \hat{x}_3' og \hat{x}_4' tilsvarende.

Autonomin sk (6.49) fra det autonome system $\hat{\psi}' = \hat{\psi}'(\hat{\psi})$ fås:

$$\hat{x}_1' = \hat{\psi}'(\hat{\psi}_1)$$

$$\hat{x}_2' = \hat{\psi}'(\hat{\psi}_2)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{x}_1' & \hat{x}_2' & \hat{x}_3' & \hat{x}_4' \end{pmatrix}$$

6.4. Startmetode.

Initialbetingelsene er gitt ved løsningsvektorfunksjonen og dens deriverte i startpunktet. Vi trenger derfor en enskrifts startmetode for vår flerskrittmetode. Som slik startmetode bruker vi en Nyströmmetode av orden 5 [1, s.173]. På autonom form:

$$\begin{aligned}
 \vec{k}_1 &= \vec{f}(\vec{u}_n) && (6.49) \\
 \vec{k}_2 &= \vec{f}\left(\vec{u}_n + \frac{2}{5}h\vec{u}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1\right) \\
 \vec{k}_3 &= \vec{f}\left(\vec{u}_n + \frac{2}{3}h\vec{u}'_n + \frac{2}{9}h^2\vec{k}_1\right) \\
 \vec{k}_4 &= \vec{f}\left(\vec{u}_n + \frac{4}{5}h\vec{u}'_n + \frac{4}{25}h^2(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)\right) \\
 \vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_n + h\vec{u}'_n + \frac{h^2}{192}(23\vec{k}_1 + 75\vec{k}_2 - 27\vec{k}_3 + 25\vec{k}_4) \\
 \vec{u}'_{n+1} &= \vec{u}'_n + \frac{h}{192}(23\vec{k}_1 + 125\vec{k}_2 - 81\vec{k}_3 + 125\vec{k}_4)
 \end{aligned}$$

De problemer vi skal løse er imidlertid generelt ikke på autonom form. (6.49) omformes til ikke-autonom form ved å utvide \vec{y} med et element t til $\vec{\tilde{Y}}$:

$$\vec{\tilde{Y}} \equiv \begin{Bmatrix} \vec{y} \\ t \end{Bmatrix} \quad (6.51)$$

Herav:

$$\vec{\tilde{Y}}' = \begin{Bmatrix} \vec{y}' \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (6.52)$$

$$\vec{\tilde{Y}}'' = \begin{Bmatrix} \vec{y}'' \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{f}(t, \vec{\tilde{Y}}) \\ 0 \end{Bmatrix} \equiv \vec{F}(\vec{\tilde{Y}}) \quad (6.53)$$

Definerer \vec{U}_n , \vec{U}'_n , \vec{k}_1 , \vec{k}_2 , \vec{k}_3 og \vec{k}_4 tilsvarende.

Anvendes så (6.49) på det autonome system $\vec{\tilde{Y}}'' = \vec{F}(\vec{\tilde{Y}})$ fås:

$$\vec{k}_1 = \vec{F}(\vec{U}_n) \quad (6.54)$$

$$= \vec{F}\left(\begin{Bmatrix} \vec{u}_n \\ t_n \end{Bmatrix}\right) \quad (6.55)$$

$$= \begin{Bmatrix} \vec{f}(t_n, \vec{u}_n) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.56)$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{k}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.57)$$

6.5. Valg av metode for startintegrasjonen:

$$\vec{k}_2 = \vec{F}(\vec{U}_n + \frac{2}{5}h\vec{U}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1) \quad (6.58)$$

$$\text{følgende måte: } = \vec{F}\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_n + \frac{2}{5}h\vec{u}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1 \\ t_n + \frac{2}{5}h \cdot 1 + \frac{2}{25}h^2 \cdot 0 \end{pmatrix}\right) \quad (6.59)$$

1. Integrerer med \vec{k}_1 fra startintegrasjonen og tilsvarende startskritt:

$$= \begin{pmatrix} \vec{F}(t_n + \frac{2}{5}h, \vec{u}_n + \frac{2}{5}h\vec{u}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.60)$$

2. Integrerer med \vec{k}_2 fra startintegrasjonen og tilsvarende startskritt:

$$= \begin{pmatrix} \vec{k}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.61)$$

skritt.

Fortsettes tilsvarende fås til slutt:

$$\vec{k}_1 = \vec{F}(t_n, \vec{u}_n) \quad \text{5. orden, last av startintegrasjonen av}$$

orden 5. Denne teknikken kallas trunks integrasjon. Det vil si at:

$$\vec{k}_2 = \vec{F}(t_n + \frac{2}{5}h, \vec{u}_n + \frac{2}{5}h\vec{u}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1) \quad (6.63)$$

$$\vec{k}_3 = \vec{F}(t_n + \frac{2}{3}h, \vec{u}_n + \frac{2}{3}h\vec{u}'_n + \frac{2}{9}h^2\vec{k}_1) \quad (6.62)$$

$$\vec{k}_4 = \vec{F}(t_n + \frac{4}{5}h, \vec{u}_n + \frac{4}{5}\vec{u}'_n + \frac{4}{25}h^2(\vec{k}_1 + \vec{k}_2))$$

$$\vec{u}_{n+1} = \vec{u}_n + h\vec{u}'_n + \frac{h^2}{192}(23\vec{k}_1 + 75\vec{k}_2 - 27\vec{k}_3 + 25\vec{k}_4) \quad (6.65)$$

$$\vec{u}'_{n+1} = \vec{u}'_n + \frac{h}{192}(23\vec{k}_1 + 125\vec{k}_2 - 81\vec{k}_3 + 125\vec{k}_4)$$

Dette er Nyströms 5.ordens metode på ikke-autonom form som vi vil bruke som startintegrasjonsmetode.

Vi bruker denne metoden i stedet for den eksponentielle metoden som vi har lært før. Dette er et godt valg da den eksponentielle metoden er svært vanskelig å implementere. Vi kan derfor ikke bruke den eksponentielle metoden.

$$\vec{u}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}'_0 \cdot h + \frac{h^2}{2!} \vec{u}''_0 \cdot h^2 + \dots \quad (6.63*)$$

og

$$(6.63*)$$

eller det kan

$$\vec{u}_n = \vec{u}_0 + \vec{u}'_0 \cdot h + \frac{h^2}{2!} \vec{u}''_0 \cdot h^2 + \dots \quad (6.64)$$

$$+ \frac{h^3}{3!} \vec{u}'''_0 \cdot h^3 + \dots \quad (6.65)$$

6.5. Valg av skritt for startintegrasjonen.

Det vil
Skritten reguleres før selve startintegrasjonen på
følgende måte:

1. Integrerer med det av brukeren spesifiserte initielle skritt h fra startpunkt a til $a+h$. Resultat: \vec{u}_1^* .
2. Integrerer med skritt $\frac{h}{2}$ fra a til $a+h$. Resultat: \vec{u}_1' .
3. Estimer h_{ny} på grunnlag av differansen mellom \vec{u}_1^* og \vec{u}_1' slik at h_{ny} gir estimert global trunkeringsfeil lik eps etter ett skritt.
4. Bruk $\frac{1}{2}h_{ny}$ ved startintegrasjonen.

Metoden er av 5. orden. Det vil i følge definisjonen av orden si at den lokale trunkeringsfeil er $O(h^7)$. Det vil si:

$$\|\vec{u}_1^* - \vec{y}_1\|_\infty = K \cdot h^7 + O(h^8) \quad (6.63)$$

$$\left\| \vec{u}_{\frac{1}{2}} - \vec{y}_{\frac{1}{2}} \right\|_\infty = K \left(\frac{h}{2} \right)^7 + O(h^8) \quad (6.64)$$

$$\left\| \vec{u}_1 - \vec{y}_1 \right\|_\infty \approx 2K \left(\frac{h}{2} \right)^7 + O(h^8) \quad (6.65)$$

Tilnærmingstegnet i siste relasjon skyldes at en bruker \vec{u}_1 og $\vec{u}_{\frac{1}{2}}$ og ikke \vec{y}_1 og $\vec{y}_{\frac{1}{2}}$ til beregning av \vec{u}_1 og at

integrasjonsintervallet er forskjøvet. Feilen i \vec{u}_1 blir derfor en mellomting mellom lokal og global trunkeringsfeil. Den siste er $O(h^5)$ [1, s.177]. Ved estimeringen vil vi derfor istedenfor (6.63) og (6.65) bruke:

$$\|\vec{u}_1^* - \vec{y}_1\|_\infty \approx K \cdot h^6 \quad (6.63^*)$$

og

$$\left\| \vec{u}_1 - \vec{y}_1 \right\|_\infty \approx 2K \left(\frac{h}{2} \right)^6 \quad (6.65^*)$$

Det gir da:

$$\|\vec{u}_1^* - \vec{u}_1\|_\infty \leq \|\vec{u}_1^* - \vec{y}_1\|_\infty + \|\vec{y}_1 - \vec{u}_1\|_\infty \quad (6.66)$$

$$\approx K \cdot h^6 \left(1 + \frac{2}{64} \right) \quad (6.67a)$$

$$6.6. \text{ Polynomisk interpolasjon} = \frac{33}{32} K \cdot h^6 \text{ og } SCA, \quad (6.67b)$$

Det vil si: SCA og SCA beregnes i enheten i vilkårlige punkter ved polynomisk interpolasjon. Dette brukes ved halvering av skrittet og ved $K \approx \frac{32}{33} ||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_{\infty} h^{-6}$. Dette må ikke gis global trukkenhetsfeil til $O(h^7)$, men en 5-grade interpolasjonspolynom h_{ny} er altså gitt ved:

$$h_{ny} = \sqrt[6]{K \cdot h_{ny}^2} \approx \text{eps} \quad (6.69)$$

$$h_{ny}^6 \approx \frac{\text{eps}}{K} \quad (6.70)$$

dvs. vi kan velge et startskritt med $h_{start} = h_{ny}$.

$$\text{En får da følgende: } \frac{\text{eps}}{\frac{32}{33} ||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_{\infty} h^{-6}} \quad (6.71)$$

$$\text{Altså: } h_{start} = \sqrt[6]{\frac{33 \text{eps}}{32 ||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_{\infty}}} \quad (6.72)$$

$$(Kommer) h_{ny} \approx h \sqrt[6]{\frac{33 \text{eps}}{32 ||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_{\infty}}} \quad (6.73)$$

Vi velger å bruke

$$h_{start} = \frac{1}{2} h \sqrt[6]{\frac{\text{eps}}{||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_{\infty}}} \quad (6.74)$$

dersom $h_{start} \leq 4h$, ellers brukes $h_{start} = 4h$.

Først 6.6.1. Interpolasjonen blir dermed:

$\tilde{f}(t)$ med oppfylle følgende betingelser:

$$\tilde{f}(t_{n-3}) = f_{n-3}, \quad \tilde{f}'(t_{n-3}) = f'_{n-3}, \quad \dots \quad (6.76)$$

$$\tilde{f}''(t_{n-3+1}) = f''_{n-3+1}, \quad \dots \quad (6.77)$$

Skaleres til gr

$$g = \frac{t^{n-3}}{h} \quad (6.78)$$

Interpolasjonspolynomet kan da uttrykkes slik i denne variabelen:

6.6. Polynomisk interpolasjon for PER og SC4.

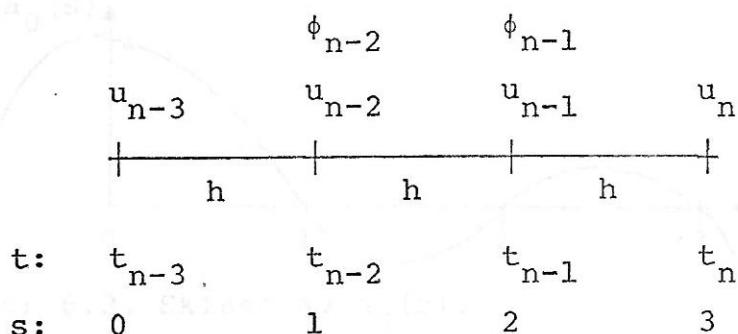
I PER og SC4 beregnes løsningen i vilkårlige punkter ved polynomisk interpolasjon. Denne brukes ved halvering av skrittet og ved utskrift i ønskete punkter. Siden metoden gir global trunkeringsfeil lik $O(h^5)$, trenges et 5.grads interpolasjonspolynom for at feilen ved interpolasjonen skal være av samme orden som de størrelser som inngår i interpolasjonsformelen. Denne må da baseres på minst 6 verdier av u eller ϕ . Det naturlige valg er

$u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, \phi_n, \phi_{n-1}$ og ϕ_{n-2} . Det viser seg imidlertid at det er umulig å konstruere et 5.grads interpolasjonspolynom basert på disse verdiene. Erstatter derfor ϕ_n med u_{n-3} (figur 6.1).

En får da følgende interpolasjonspolynom:

$$\tilde{p}(t) = \sum_{i=0}^3 \tilde{a}_i(t) u_{n-3+i} + \sum_{i=1}^2 \tilde{b}_i(t) \phi_{n+3-i} \quad (6.75)$$

(Regner skalart i dette avsnitt.)



Figur 6.1. Interpolasjonspunkter og -verdier.

$\tilde{p}(t)$ skal oppfylle følgende betingelser:

$$\tilde{p}(t_{n-3+i}) = u_{n-3+i}, \quad i = 0(1)3 \quad (6.76)$$

$$\tilde{p}''(t_{n-3+i}) = \phi_{n-3+i}, \quad i = 1, 2 \quad (6.77)$$

Skalerer t til s :

$$s \equiv \frac{t-t_{n-3}}{h} \quad (6.78)$$

Interpolasjonspolynomet kan da uttrykkes slik i den nye variable:

$$p(s) = \sum_{i=0}^3 a_i(s) u_{n-3+i} + h^2 \sum_{i=1}^2 b_i(s) \phi_{n-3+i} \quad (6.79)$$

$p(s)$ må da tilsvarende oppfylle følgende betingelser:

$$p(i) = \tilde{p}(t_{n-3+i}) = u_{n-3+i}, \quad i = 0(1)3 \quad (6.80)$$

$$p''(i) = \tilde{p}''(t_{n-3+i}) \frac{d^2 t}{ds^2} = \phi_{n-3+i} \cdot h^2, \quad i = 1, 2 \quad (6.81)$$

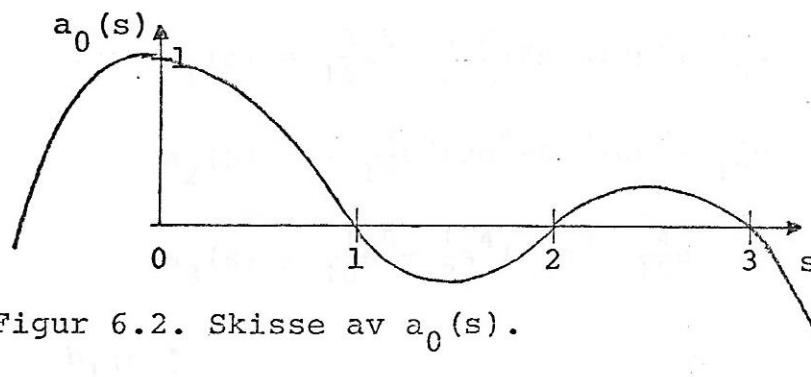
Herav følger betingelsene:

$$a_j(i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 0(1)3 \quad (6.82)$$

$$b_j(i) = 0, \quad i = 0(1)3, \quad j = 1, 2 \quad (6.83)$$

$$a_j''(i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 0(1)3 \quad (6.84)$$

$$b_j''(i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (6.85)$$



Figur 6.2. Skisse av $a_0(s)$.

Fra (6.84) og kravet om 5.gradspolynom har en at:

$$a_0''(s) = (s-1)(s-2)(cs+d) \quad (6.86)$$

Integriert:

$$a_0(s) = \frac{c}{20} s^5 + \frac{d-3c}{12} s^4 + \frac{2c-3d}{6} s^3 + ds^2 + es + f \quad (6.87)$$

(6.82) anvendt på (6.87) gir følgende likningssystem:

(6.84) og (6.85) gir følgende likningssystem:

$$\frac{2}{15}c + \frac{7}{12}d + e + f = 0 \quad (6.88)$$

$$\frac{4}{15}c + \frac{4}{3}d + 2e + f = 0$$

$$\frac{9}{10}c + \frac{9}{4}d + 3e + f = 0$$

Løsningen av (6.88) er:

$$c = -2, \quad d = 6, \quad e = -\frac{127}{30}, \quad f = 1$$

Innsatt i (6.87) gir det:

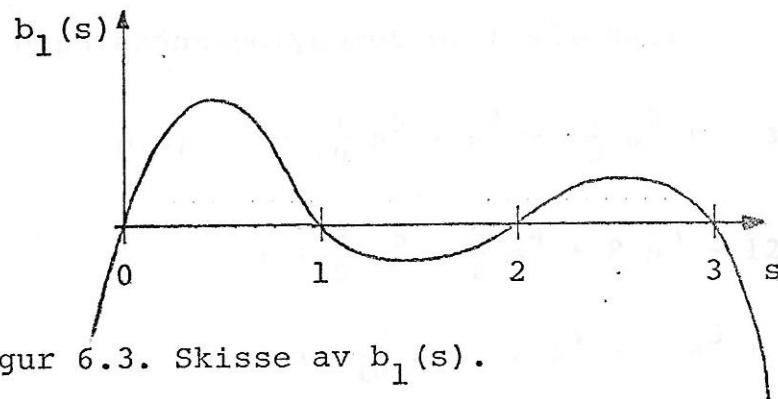
$$a_0(s) = -\frac{1}{10}s^5 + s^4 - \frac{11}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{127}{30}s + 1 \quad (6.89)$$

Tilsvarende fås:

$$a_1(s) = \frac{3}{10}s^5 - \frac{5}{2}s^4 + 8s^3 - 12s^2 + \frac{36}{5}s \quad (6.90)$$

$$a_2(s) = -\frac{3}{10}s^5 + 2s^4 - 5s^3 + 6s^2 - \frac{27}{10}s \quad (6.91)$$

$$a_3(s) = \frac{1}{10}s^5 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{3}s^3 - \frac{4}{15}s \quad (6.92)$$



Figur 6.3. Skisse av $b_1(s)$.

Fra (6.85) fås:

$$b_1''(s) = (s-2)(cs^2 + ds + e) \quad (6.93)$$

Integriert:

$$b_1(s) = \frac{c}{20}s^5 + \frac{d-2c}{12}s^4 + \frac{e-2d}{6}s^3 - es^2 + fs + g \quad (6.94)$$

Fra (6.83) og (6.85) fås følgende likningssystem:

$$-c - d - e = 1$$

$$g = 0$$

$$\frac{c}{20} + \frac{d-2c}{12} + \frac{e-2d}{6} - e + f = 0 \quad (6.95)$$

$$32\frac{c}{20} + 16\frac{d-2c}{12} + 8\frac{e-2d}{6} - 4e + 2f = 0$$

$$243\frac{c}{20} + 81\frac{d-2c}{12} + 27\frac{e-2d}{6} - 9e + 3f = 0$$

Løsning:

$$c = 2, d = -8, e = 5, f = \frac{12}{5}, g = 0$$

Innsatt i (6.94):

$$b_1(s) = \frac{1}{10}s^5 - s^4 + \frac{7}{2}s^3 - 5s^2 + \frac{12}{5}s \quad (6.96)$$

Analogt fås:

$$b_2(s) = -\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{5}s \quad (6.97)$$

Interpolasjonspolynomet blir således:

$$\begin{aligned}
 p(s) &= \left(-\frac{1}{10}s^5 + s^4 - \frac{11}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{127}{30}s + 1 \right) u_{n-3} \\
 &\quad + \left(\frac{3}{10}s^5 - \frac{5}{2}s^4 + 8s^3 - 12s^2 + \frac{36}{5}s \right) u_{n-2} \\
 &\quad + \left(-\frac{3}{10}s^5 + 2s^4 - 5s^3 + 6s^2 - \frac{27}{10}s \right) u_{n-1} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{10}s^5 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{3}s^3 - \frac{4}{15}s \right) u_n \\
 &\quad + \left(\frac{1}{10}s^5 - s^4 + \frac{7}{2}s^3 - 5s^2 + \frac{12}{5}s \right) h^2 \cdot \phi_{n-2} \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{5}s \right) h^2 \cdot \phi_{n-1}
 \end{aligned} \quad (6.98)$$

eller delvis faktorisert:

$$p(s) = -\frac{1}{30}(3s^2 - 12s + 5)(s-1)(s-2)(s-3)u_{n-3}$$

$$+ \frac{1}{10}(3s^2 - 10s + 12)s(s-2)(s-3)u_{n-2}$$

$$- \frac{1}{10}(3s^2 - 8s + 9)s(s-1)(s-3)u_{n-1}$$

(6.99)

$$+ \frac{1}{30}(3s^2 - 6s - 4)s(s-1)(s-2)u_n$$

$$p(s) + \frac{1}{10}s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)h^2 \cdot \phi_{n-2}$$

$$- \frac{1}{10}(s+1)s(s-1)(s-2)(s-3)h^2 \cdot \phi_{n-1}$$

(6.104)

Ønsker nå å finne feilreddspolynomet $C(s)$ i interpolasjonspolynomet. En har at:

$$C(s)y^{(6)}(t) \cdot h^6 + O(h^7) \quad (6.100)$$

$$= p(s) \Big|_{\begin{array}{l} u=y \\ \phi=f \end{array}}$$

$$= a_0(s) \frac{y^{(6)}}{6!} (-3h)^6 + a_1(s) \frac{y^{(6)}}{6!} (-2h)^2 + a_2(s) \frac{y^{(6)}}{6!} (-h)^6$$

$$+ a_3(s) \cdot 0 + b_1(s) \frac{y^{(6)}}{4!} (-2h)^4 h^2 + b_2(s) \frac{y^{(6)}}{4!} (-h)^4 h^2 \quad (6.101)$$

$$- \frac{1}{6!} y^{(6)}(s-3)^6 h^6 + O(h^7)$$

$$= \frac{729a_0(s) + 64a_1(s) + a_2(s) + 480b_1(s) + 30b_2(s) - (s-3)^6}{6!} y^{(6)} h^6 + O(h^7) \quad (6.102)$$

Herav fås:

$$C(s) = \frac{-s^6 + 9s^5 - 29s^4 + 39s^3 - 18s^2}{6!} \quad (6.103)$$

$6! \cdot C(s)$ er skissert i figur 6.4.

Hvis en nå erstatter ϕ_{n-2} med ϕ_n og konstruerer et interpolasjonspolynom $p^*(s)$ basert på $u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, \phi_n$ og ϕ_{n-1} , skulle det ikke være urimelig å vente at feilreddspolynomet $C^*(s)$ i dette tilfelle har mindre maksimumsnorm enn $C(s)$ i intervallet $[2,3]$. Dette viser seg imidlertid ikke å være tilfelle. (Se figur 6.4.) Vi vil derfor bruke $p(s)$ i PER og SC4. I PERDIAG brukes interpolasjonsformelen gitt ved (2.127-132).

Vi finner at

$$p^*(s) = \sum_{i=0}^3 a_i^*(s) u_{n-3+i} + h^2 \sum_{i=2}^3 b_i^*(s) \phi_{n-3+i} \quad (6.104)$$

$$= \left(-\frac{1}{10}s^5 + s^4 - \frac{11}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{127}{30}s + 1 \right) u_{n-3} \quad (6.104)$$

$$+ \left(\frac{3}{2}s^5 - \frac{29}{2}s^4 + 50s^3 - 72s^2 + 36s \right) u_{n-2}$$

$$+ \left(-\frac{27}{10}s^5 + 26s^4 - 89s^3 + 126s^2 - \frac{603}{10}s \right) u_{n-1} \quad (6.104)$$

$$+ \left(\frac{13}{10}s^5 - \frac{25}{2}s^4 + \frac{128}{3}s^3 - 60s^2 + \frac{428}{15}s \right) u_n \quad (6.104)$$

$$+ \left(-\frac{11}{10}s^5 + \frac{21}{2}s^4 - \frac{71}{2}s^3 + \frac{99}{2}s^2 - \frac{117}{5}s \right) h^2 \cdot \phi_{n-1}$$

$$+ \left(-\frac{1}{10}s^5 + s^4 - \frac{7}{2}s^3 + 5s^2 - \frac{12}{5}s \right) h^2 \cdot \phi_n \quad (6.104)$$

Feilpolynomberegning:

$$p^*(s) \Big|_{\substack{u=y \\ \phi=f}} = y(t+(s-3)h) = C^*(s) y^{(6)}(t) h^6 + O(h^7) \quad (6.106)$$

$$= a_0^*(s) \frac{y^{(6)}}{6!} (-3h)^6 + a_1^*(s) \frac{y^{(6)}}{6!} (-2h)^6 + a_2^*(s) \frac{y^{(6)}}{6!} (-h)^6 \\ + a_3^*(s) \cdot 0 + b_2^*(s) h^2 \frac{y^{(6)}}{4!} (-h)^4 + b_3^*(s) \cdot 0 \quad (6.107)$$

$$- \frac{1}{6!} y^{(6)}(s-3)^6 h^6 + O(h^7)$$

$$= \frac{729a_0^*(s) + 64a_1^*(s) + a_2^*(s) + 30b_2^*(s) - (s-3)^6}{6!} y^{(6)} h^6 + O(h^7) \quad (6.108)$$

Herav:

$$C^*(s) = \frac{-s^6 + \frac{27}{5}s^5 + 7s^4 - 87s^3 + 162s^2 - \frac{432}{5}s}{6!} \quad (6.109)$$

$6! \cdot C^*(s)$ er skissert i figur 6.4 sammen med $6! \cdot C(s)$.

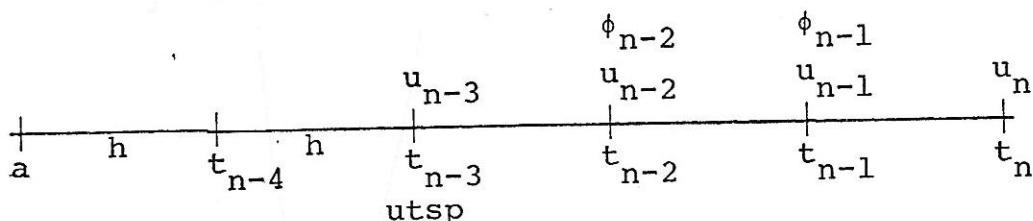
$p(s)$ brukes også når en ved halvering av skrittet skal beregne $u_{n-\frac{1}{2}}$ og $u_{n-\frac{3}{2}}$. Disse svarer henholdsvis til $s = \frac{5}{2}$ og $s = \frac{3}{2}$.

Ved innsetting i (6.99) fås:

$$\begin{aligned} u_{n-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{64}(5u_{n-3} + 27u_{n-2} + 27u_{n-1} + 5u_n) \\ &\quad - \frac{9h^2}{64}(\phi_{n-2} + \phi_{n-1}) \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$\begin{aligned} u_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{64}(-5u_{n-3} - 23u_{n-2} + 93u_{n-1} - u_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{64}(9\phi_{n-2} + 21\phi_{n-1}) \end{aligned} \quad (6.111)$$

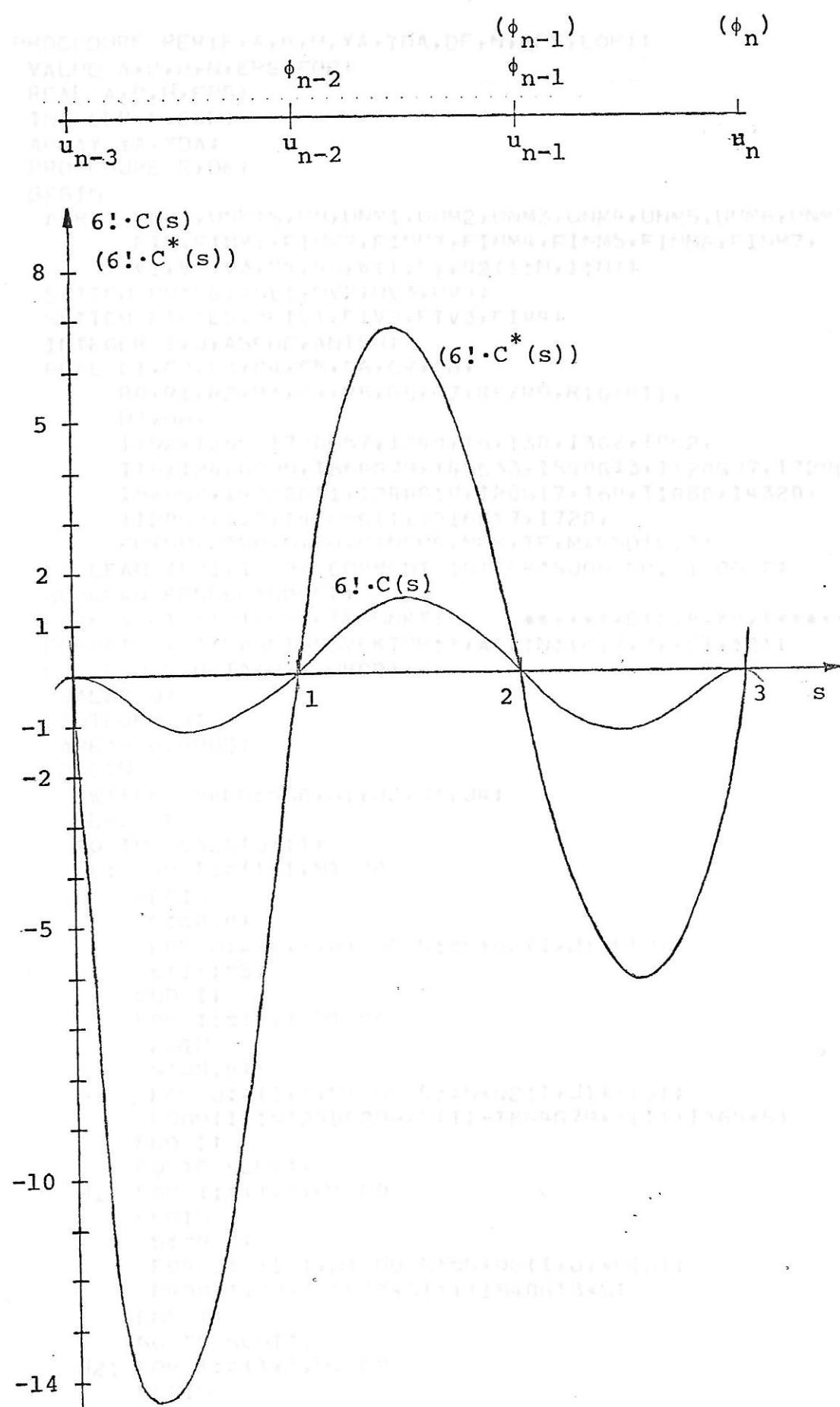
For at interpolasjonsfeilen skal bli minst mulig, bør utskriftspunktet utsp ligge i intervallet $[t_{n-3}, t_n]$. Under startintegrasjonen foretas ingen interpolasjon for utskrift. Dette skjer først etter at ett skritt er tatt med hovedintegrasjonen ($TTS_4 - TTC_4$). For at utsp skal ligge i $[t_{n-3}, t_n]$ bør en derfor velge $h_{start} = \frac{1}{2}(utsp - a)$ dersom h_{start} etter de andre kriteriene referert tidligere er spesifisert større enn $\frac{1}{2}(utsp - a)$. (a er startpunktet av integrasjonen.) I dette tilfelle vil situasjonen ved første utskriftsinterpolasjon være som angitt i figur 6.5.



Figur 6.5.

Utskrift av PER, PERDIAG og SC4 avslutter dette kapittel.

6.7. Utskrift av PFK.



Figur 6.4. Feilleddspolynomer.

6.7. Utskrift av PER.

```

1      PROCEDURE PER(F,A,B,H,YA,YDA,DF,N,EPS,EOP);
2          VALUE A,B,H,N,EPS,EOP;
3          REAL A,B,H,EPS;
4          INTEGER N,EOP;
5          ARRAY YA,YDA;
6          PROCEDURE F,DF;
7          BEGIN
8              ARRAY UNP1,UNP1S,UN,UNM1,UNM2,UNM3,UNM4,UNM5,UNM6,UNM7,
9                  FIN,FINM1,FINM2,FINM3,FINM4,FINM5,FINM6,FINM7,
10                 V1,V2,V3,V4,V5,W(1:N),Q2(1:N,1:N);
11             SWITCH UVALG:=UV1,UV2,UV3,UV4;
12             SWITCH FIVALG:=FIV1,FIV2,FIV3,FIV4;
13             INTEGER I,J,ASEHE,ANTMH;
14             REAL C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,
15                 R0,R1,R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,R10,R11,
16                 H2,HH,
17                 I192,I360,I720G57,I240,I6,I30,I3G2,I9G2,
18                 I19,I240G299,I864G79,I45G33,I540G13,I120G97,I720G19,I5G2,I
19                 I540G7,I4320G11,I240G19,I20G17,I60,I1080,I4320,
20                 I120G7,I12,I4360G11,I216G17,I720,
21                 FUTSP,UTSP,S,MH,MINEPS,MUW,TF,MAKSDIF,T;
22             BOOLEAN INR1,INR2; COMMENT INTEGRASJON NR. 1 OG 2;
23             BOOLEAN EPSFORANDRET;
24             FORMAT UTT('UTSKRIFTSPUNKT:      *****',D18.8,X8,'*****',A2);
25             FORMAT UTV('LØSNINGSVEKTOR:',A1,:N:(R17.9,X5),A2);
26             PROCEDURE BETA(J,G,PROD);
27                 VALUE J;
28                 INTEGER J;
29                 ARRAY G,PROD;
30                 BEGIN
31                     SWITCH JVALG:=J0,J1,J2,J3,J4;
32                     REAL S;
33                     GO TO JVALG(J+1);
34                     J0: FOR I:=(1,1,N) DO
35                         BEGIN
36                             S:=0.0;
37                             FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
38                             W(I):=S;
39                             END I;
40                             FOR I:=(1,1,N) DO
41                                 BEGIN
42                                     S:=0.0;
43                                     FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*W(J);
44                                     PROD(I):=I240G299*G(I)-I864G79*W(I)+I360*S;
45                                     END I;
46                                     GO TO SLUTT;
47                     J1: FOR I:=(1,1,N) DO
48                         BEGIN
49                             S:=0.0;
50                             FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
51                             PROD(I):=-I45G33*G(I)+I540G13*S;
52                             END I;
53                             GO TO SLUTT;
54                     J2: FOR I:=(1,1,N) DO
55                         BEGIN
56                             S:=0.0;
57                             FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
58                             PROD(I):=I120G97*G(I)-I720G19*S;
59                             END I;
60                             GO TO SLUTT;
61                     J3: FOR I:=(1,1,N) DO

```

```

62      BEGIN
63          S:=0.0;
64          FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
65          PROD(I):=-I5G2*G(I)+I540G7*S;
66          END I;
67          GO TO SLUTT;
68      J4: FOR I:=(1,1,N) DO
69          BEGIN
70              S:=0.0;
71              FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
72              PROD(I):=I720G57*G(I)-I4320G11*S;
73              END I;
74          SLUTT;
75      END PROCEDURE BETA;
76      PROCEDURE BETASTJERNE(J,G,PROD);
77          VALUE J;
78          INTEGER J;
79          ARRAY G,PROD;
80          BEGIN
81              SWITCH JVALG:=J0,J1,J2,J3,J4;
82              REAL S;
83              GO TO JVALG(J+1);
84              J0: FOR I:=(1,1,N) DO
85                  BEGIN
86                      S:=0.0;
87                      FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
88                      PROD(I):=I240G19*G(I)-I4320G11*S;
89                  END I;
90                  GO TO SLUTT;
91              J1: FOR I:=(1,1,N) DO
92                  BEGIN
93                      S:=0.0;
94                      FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
95                      W(I):=S;
96                  END I;
97                  FOR I:=(1,1,N) DO
98                      BEGIN
99                          S:=0.0;
100                         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*W(J);
101                         PROD(I):=I20G17*G(I)-I216G17*W(I)+I360*S;
102                     END I;
103                     GO TO SLUTT;
104                 J2: FOR I:=(1,1,N) DO
105                     BEGIN
106                         S:=0.0;
107                         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
108                         PROD(I):=I120G7*G(I)-I720*S;
109                     END I;
110                     GO TO SLUTT;
111                 J3: FOR I:=(1,1,N) DO
112                     BEGIN
113                         S:=0.0;
114                         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
115                         PROD(I):=I60*G(I)-I1080*S;
116                     END I;
117                     GO TO SLUTT;
118                 J4: FOR I:=(1,1,N) DO
119                     BEGIN
120                         S:=0.0;
121                         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
122                         PROD(I):=-I240*G(I)+I4320*S;
123                     END I;

```

```

124     SLUTT;
125   END PROCEDURE BETASTJERNE;
126   PROCEDURE WEIGHT(EOP,U,N,W);
127     COMMENT PROSEODYRE SOM OPPRETTER OG OPPDATERER FEILVEKTOREN W;
128     VALUE EOP,U,N;
129     INTEGER EOP,N;
130     ARRAY U,W;
131   BEGIN
132     SWITCH E:=E1,E2,E3;
133     INTEGER I;
134     REAL S;
135     GO TO E(EOP);
136     E1: COMMENT ABSOLUTT;
137       FOR I:=(1,1,N) DO W(I):=1.0;
138       GO TO SLUTT;
139     E2: COMMENT RELATIV;
140       FOR I:=(1,1,N) DO
141         BEGIN
142           S:=ABS(U(I));
143           W(I):=IF S LSS &-8 THEN &8 ELSE 1.0/S;
144           END I;
145           GO TO SLUTT;
146     E3: COMMENT BLANDET;
147       FOR I:=(1,1,N) DO
148         BEGIN
149           S:=ABS(U(I));
150           W(I):=IF S GTR 1.0 THEN 1.0/S ELSE 1.0;
151         END;
152     SLUTT;
153   END PROCEDURE WEIGHT;
154   COMMENT
155   **** STARTTEST ****
156   IF EOP NEQ 1 AND EOP NEQ 2 AND EOP NEQ 3 THEN
157     BEGIN
158       WRITE('*** FEILOPSJON MÅ VARE 1, 2 ELLER 3. ');
159       GO TO ENDPROC;
160     END;
161   READ(UTSP,NODATA); COMMENT LESEN FØRSTE UTSKRIFTSPUNKT;
162   IF UTSP GTR B+&-7 THEN
163     BEGIN
164       WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET. ');
165       GO TO ENDPROC;
166     END;
167   COMMENT
168   **** INITIALISERING ****
169   BRUKER EN NYSTRØMMETODE AV ORDEN 5 SOM STARTMETODE.
170   DETTE ER EN RUNGE-KUTTA-METODE FOR INTEGRASJEN AV 2. ORDENS PROBLEMER
171   *      *      *      *      *      *
172   FØRST BEREGNES ENDEL VERDER SOM SKAL BRUKES OFTE I RUTINEN;
173   I192:=1.0/192.0;
174   I360:=1.0/360.0;
175   I720:=1.0/720.0;
176   I720G57:=57.0/720.0;
177   I240:=1.0/240.0;
178   I6:=1.0/6.0;
179   I12:=1.0/12.0;
180   I30:=1.0/30.0;
181   I362:=2.0/3.0;
182   I962:=2.0/9.0;
183   I19:=1.0/19.0;
184   I240G299:=299.0/240.0;
185   I864G79:=79.0/864.0;

```

```

186     I45G33:=33.0/45.0;
187     I540G13:=13.0/540.0;
188     I120G97:=97.0/120.0;
189     I720G19:=19.0/720.0;
190     I5G2:=0.4;
191     I540G7:=7.0/540.0;
192     I4320G11:=11.0/4320.0;
193     I240G19:=19.0/240.0;
194     I4360G11:=11.0/4360.0;
195     I20G17:=17.0/20.0;
196     I216G17:=17.0/216.0;
197     I60:=1.0/60.0;
198     I1080:=1.0/1080.0;
199     I4320:=1.0/4320.0;
200     I120G7:=7.0/120.0;
201     WRITE(UTT,A);
202     WRITE(UTV,YA);
203     FOR I:=(1,1,N) DO UNM4(I):=YA(I);
204     INR1:=TRUE;
205     COMMENT FØRST BEREGNING AV PASSE H1
206     STARTINTEGRASJON:
207     H2:=H*H;
208     C1:=0.4*H;
209     C2:=0.08*H2;
210     C3:=I3G2*H;
211     C4:=I9G2*H2;
212     C5:=0.8*H;
213     C6:=0.16*H2;
214     C7:=I192*H2;
215     C8:=I192*H;
216     T:=A;
217     J:=0;
218     FOR I:=(1,1,N) DO
219     BEGIN
220       UN(I):=YA(I);
221       UNM7(I):=YDA(I);
222     END I;
223     OPP:
224     J:=J+1;
225     F(T,UN,N,V1);
226     FOR I:=(1,1,N) DO
227     BEGIN
228       R1:=UN(I);
229       R2:=UNM7(I);
230       R3:=V1(I);
231       V2(I):=R1+C1*R2+C2*R3;
232       V3(I):=R1+C3*R2+C4*R3;
233       V4(I):=R1+C5*R2+C6*R3;
234     END I;
235     F(T+C1,V2,N,V5);
236     F(T+C3,V3,N,V2);
237     FOR I:=(1,1,N) DO
238       V4(I):=V4(I)+C6*V5(I);
239     F(T+C5,V4,N,V3);
240     FOR I:=(1,1,N) DO
241     BEGIN
242       R0:=UN(I);
243       R1:=23.0*V1(I);
244       R2:=V5(I);
245       R3:=V2(I);
246       R4:=V3(I);
247       R5:=UNM7(I);

```

```

248 R6:=UN(I):=R0+H*R5+C7*(R1+75.0*R2-27.0*R3+25.0*R4);
249 UNM7(I):=UNM7(I)+C8*(R1+125.0*R2-81.0*R3+125.0*R4);
250 IF INR1 THEN GO TO UV3;
251 GO TO UVALG(J);
252 UV1: UNM3(I):=R6; GO TO UV4;
253 UV2: UNM2(I):=R6; GO TO UV4;
254 UV3: UNM1(I):=R6; GO TO UV4;
255 UV4:
256 END I;
257 IF INR1 THEN
258 BEGIN
259 H:=0.5*H;
260 INR1:=FALSE;
261 INR2:=TRUE;
262 GO TO STARTINTEGRASJON;
263 END;
264 IF INR2 AND J EQL 2 THEN
265 BEGIN
266 MAKSDIF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNM1(I)-UNM2(I)));
267 IF MAKSDIF LSS &-10 THEN
268 H:=SQRT(H*EPS)
269 ELSE
270 BEGIN
271 R0:=0.5*(EPS/MAKSDIF)**I6;
272 IF R0 GTR 4.0 THEN R0:=4.0;
273 H:=H*R0;
274 END;
275 R0:=UTSP-A;
276 IF R0 GTR &-6 AND R0 LSS 2.0*H THEN H:=0.5*R0;
277 INR2:=FALSE;
278 GO TO STARTINTEGRASJON;
279 END;
280 FOR I:=(1,1,N) DO
281 BEGIN
282 GO TO FIVALG(J);
283 FIV1: FINM4(I):=V1(I);
284 FIV2: FINM3(I):=V1(I);
285 FIV3: FINM2(I):=V1(I);
286 FIV4: FINM1(I):=V1(I);
287 END I;
288 T:=T+H;
289 IF J LSS 4 THEN GO TO OPP;
290 F(T,UN,N,FIN);
291 DF(T,UN,N,Q2);
292 COMMENT
293 *** TEST PA OM H ER LITEN NOK FOR COS-APPROKSIMASJONEN ***
294 R1:=R2:=0.0;
295 FOR I:=(1,1,N) DO
296 BEGIN
297 R0:=0.0;
298 FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+ABS(Q2(I,J));
299 IF R0 GTR R1 THEN R1:=R0;
300 R3:=ABS(UN(I));
301 IF R3 GTR R2 THEN R2:=R3;
302 END I;
303 IF R2 LSS &-10 THEN R2:=-&-10;
304 IF R1 LSS &-20 THEN GO TO VIDERE;
305 R4:=3.16*(EPS/R2)**0.125/SQRT(R1);
306 IF H GEQ R4 THEN
307 BEGIN
308 H:=0.8*R4;
309 GO TO STARTINTEGRASJON;

```

```

310      END;
311      VIDERE:
312      FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
313      HH:=0.5*H;
314      HOVEDINTEGRASJON:
315      COMMENT
316      ***** PREDIKTERING *****
317      FOR I:=(1,1,N) DO
318      BEGIN
319          R0:=R1:=R2:=0.0;
320          FOR J:=(1,1,N) DO
321          BEGIN
322              R0:=R0+Q2(I,J)*UN(J);
323              R1:=R1+Q2(I,J)*UNM1(J);
324              R2:=R2+Q2(I,J)*UNM2(J);
325          END J;
326          V1(I):=H2*FIN(I)+R0;
327          V2(I):=H2*FINM1(I)+R1;
328          V3(I):=H2*FINM2(I)+R2;
329      END I;
330      BETAP(0,V1,UNP1S);
331      BETASTJERNE(1,V1,UNP1);
332      BETAP(1,V2,V1);
333      BETASTJERNE(2,V2,V4);
334      BETAP(2,V3,V2);
335      BETASTJERNE(3,V3,V5);
336      FOR I:=(1,1,N) DO
337      BEGIN
338          UNP1S(I):=UNP1S(I)+V1(I)+V2(I);
339          UNP1(I):=UNP1(I)+V4(I)+V5(I);
340          R3:=R4:=0.0;
341          FOR J:=(1,1,N) DO
342          BEGIN
343              R3:=R3+Q2(I,J)*UNM3(J);
344              R4:=R4+Q2(I,J)*UNM4(J);
345          END J;
346          V1(I):=H2*FINM3(I)+R3;
347          V2(I):=H2*FINM4(I)+R4;
348      END I;
349      BETAP(3,V1,V3);
350      BETASTJERNE(4,V1,V4);
351      BETAP(4,V2,V1);
352      FOR I:=(1,1,N) DO
353      BEGIN
354          UNP1S(I):=UNP1S(I)+V1(I)+V3(I);
355          UNP1(I):=UNP1(I)+V4(I);
356          R0:=0.0;
357          FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+Q2(I,J)*UN(J);
358          V1(I):=R0;
359      END I;
360      FOR I:=(1,1,N) DO
361      BEGIN
362          R0:=0.0;
363          FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+Q2(I,J)*V1(J);
364          V2(I):=R0;
365      END I;
366      FOR I:=(1,1,N) DO
367      BEGIN
368          R0:=0.0;
369          FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+Q2(I,J)*V2(J);
370          R9:=2.0*UN(I)-V1(I)+I12*V2(I)-I360*R0-UNM1(I);
371          UNP1S(I):=UNP1S(I)+R9;

```

```

372 UNP1(I):=UNP1(I)+R9;
373 END I;
374 COMMENT
375 ***** KORRIGERING *****
376 COMMENT LAGRER FI,N+1 I V1;
377 F(T+H,UNP1S,N,V1);
378 FOR I:=(1,1,N) DO
379 BEGIN
380   R10:=0.0;
381   FOR J:=(1,1,N) DO R10:=R10+Q2(I,J)*UNP1S(J);
382   V1(I):=H2*V1(I)+R10;
383 END I;
384 BETASTJERNE(0,V1,V2);
385 FOR I:=(1,1,N) DO UNP1(I):=UNP1(I)+V2(I);
386 COMMENT *** HAR NA FUNNET KORREKTOREN. ESTIMERER SA GLOBAL FEIL. ***
387           *** GLOBAL FEIL=LOKAL FEIL/H.
388 WEIGHT(EOP,UN,N,W);
389 TF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I)-UNP1S(I))*W(I))*I19;
390 MUW:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I))*W(I));
391 MINEPS:=1.49E-8*MUW; COMMENT MINSTE EPS EN KAN KREVE;
392 IF EPS LSS MINEPS THEN
393 BEGIN
394   IF EPSFORANDRET THEN
395     BEGIN
396       WRITE(<<'*** RUTINEN KREVER NY EPSFORANDRING.',A1,
397             '*** DETTE TYDER PA STADIG SKENDE LOSNING.',A1,
398             '*** MENS BRUKER BNSKER ABSOLUTT FEILTESTING.',A1,
399             '*** BRUK BLANDET FEIL: EOP=3.',A1,1>>);
400   GO TO ENDPROC;
401 END;
402 EPSFORANDRET:=TRUE;
403 EPS:=MINEPS;
404 WRITE(<<'*** EPS ER KREVD FOR LITEN FOR DETTE PROBLEMET',A1,
405       '*** I FORHOLD TIL DEN GITTE MASKINNOYAKTIGHET.',A1,
406       '*** EPS ER AV RUTINEN FORANDRET TIL ',R10.3,'.',A1,1>>,
407       MINEPS);
408 END;
409 IF TF/H GTR EPS THEN
410 BEGIN
411   COMMENT
412   *** SKRITTET ER FOR STORT OG MA HALVERES. ***
413   MH:=1.49E-8*ABS(T);
414   COMMENT
415   *** MH ER MINSTE TILLATTE H PGA. MASKINNOYAKTIGHeten. ***
416   IF 0.5*H LSS MH THEN
417     BEGIN
418       WRITE(<<'*** SKRITTET ER AV RUTINEN KREVD HALVERT.',A1,
419             '*** DETTE ER IMIDLERTID UTILRADELIG PGA DEN GITTE ',
420             'MASKINNOYAKTIGHET.',A1,
421             '*** PRØVER DERFOR MED LITT FOR STORT SKRITT',A1,
422             '*** I HÅP OM AT VANSKELIGHeten ER LOKAL.',A1,1>>);
423   ANTMH:=ANTMH+1;
424   IF ANTMH GTR 3 THEN
425     BEGIN
426       WRITE(<<'*** HAR NA BRUKT FOR STORT SKRITT 3 GANGER.',A1,
427             '*** DET ER UHOLDBART Å FORTSETTE.',A1,1>>);
428     GO TO ENDPROC;
429   END;
430   GO TO NOCHANGE;
431 END
432 ELSE ANTMH:=0;
433 COMMENT

```

```

474 *** INTERPOLASJON FOR A FINNE U,N-1/2 OG U,N-3/2. ***
475 R2:=0.140625*H2;
476 R3:=0.328125*H2;
477 FOR I:=(1,1,N) DO
478 BEGIN
479   R0:=0.078125*(UNM3(I)+UN(I))+0.421875*(UNM2(I)+UNM1(I))
480   -R2*(FINM2(I)+FINM1(I));
481   R1:=-0.078125*(UNM3(I)-0.359375*UNM2(I)+1.453125*UNM1(I)
482   -0.015625*UN(I)+R2*FINM2(I)+R3*FINM1(I);
483   UNM4(I):=UNM2(I); ELLER, ELDRING AV UNM1,2,3 SKRITTET AKSEPTERES.
484   UNM3(I):=R0;
485   UNM2(I):=UNM1(I);
486   UNM1(I):=R1;
487   FINM4(I):=FINM2(I);
488   FINM2(I):=FINM1(I);
489 END I;
490 F(T-HH,UNM1,N,FINM1);
491 F(T-1.5*H,UNM3,N,FINM3);
492 ASEHE:=0;
493 H:=HH;
494 H2:=H*H;
495 HH:=0.5*H;
496 FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=0.25*Q2(I,J);
497 COMMENT
498 *** HAR NA GJORT KLAR TIL A INTEGRERE PA NYTT MED HALVERT SKRITT. ***
499 GO TO HOVEDINTEGRASJON;
500 END FOR STOR H
501 ELSE
502 IF TF/H LSS 0.005*EPS AND ASEHE GEQ 3 THEN
503 BEGIN
504   COMMENT
505   *** SKRITTET VAR FOR LITE OG BØR DOBLES. SKRITTET AKSEPTERES. ***
506   DF(T+H,UNP1,N,Q2);
507   COMMENT
508   *** TEST PA COS-APPROKSIMASJONEN. ***
509   R1:=R2:=0.0;
510   FOR I:=(1,1,N) DO
511   BEGIN
512     R0:=0.0;
513     FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+ABS(Q2(I,J));
514     IF R0 GTR R1 THEN R1:=R0;
515     R3:=ABS(UNP1(I));
516     IF R3 GTR R2 THEN R2:=R3;
517   END I;
518   IF R2 LSS &-10 THEN R2:=-10;
519   IF R1 GTR &-20 AND H GEQ 1.58*(EPS/R2)**0.125/SQRT(R1) THEN
520   BEGIN
521     FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
522     GO TO NOCHANGE;
523   END;
524   HH:=H;
525   H:=2.0*H;
526   H2:=H*H;
527   FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
528   F(T+HH,UNP1,N,FIN);
529   FOR I:=(1,1,N) DO
530   BEGIN
531     UN(I):=UNP1(I);
532     UNM2(I):=UNM3(I);
533     UNM3(I):=UNM5(I);
534     UNM4(I):=UNM7(I);
535     FINM2(I):=FINM3(I);

```

```

496     FINM3(I):=FINM5(I);
497     FINM4(I):=FINM7(I);
498     END I;
499     ASEHE:=0;
500     T:=T+HH;
501     GO TO UTSKRIFTSTEST;
502     END FOR LITEN H;
503     NOCHANGE;
504     COMMENT
505     *** H ER PASSE STOR ELLER ENDRING ER UMULIG. SKRITTET AKSEPTERES. ***
506     LAGRER FI,N+1 I UNM7. ;
507     ASEHE:=ASEHE+1;
508     FOR I:=(1,1,N) DO
509     BEGIN
510       UNM7(I):=UNM6(I);
511       UNM6(I):=UNM5(I);
512       UNM5(I):=UNM4(I);
513       UNM4(I):=UNM3(I);
514       UNM3(I):=UNM2(I);
515       UNM2(I):=UNM1(I);
516       UNM1(I):=UN(I);
517       UN(I):=UNP1(I);
518       FINM7(I):=FINM6(I);
519       FINM6(I):=FINM5(I);
520       FINM5(I):=FINM4(I);
521       FINM4(I):=FINM3(I);
522       FINM3(I):=FINM2(I);
523       FINM2(I):=FINM1(I);
524       FINM1(I):=FIN(I);
525     END I;
526     T:=T+H;
527     F(T,UNP1,N,FIN);
528     DF(T,UN,N,Q2);
529     FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
530     COMMENT
531     *** HAR NA TATT ET PASSE SKRITT OG ER KLAR TIL A TA ET NYTT SKRITT.**
532     UTSKRIFTSTEST:
533     IF UTSP GTR T THEN GO TO HOVEDINTEGRASJON;
534     S:=3.0+(UTSP-T)/H;
535     R0:=S+1.0;
536     R1:=S-1.0;
537     R2:=S-2.0;
538     R3:=S-3.0;
539     R4:=S-4.0;
540     R5:=3.0*S*S;
541     R6:=-I30*(R5-12.0*S+5.0)*R1*R2*R3;
542     R7:=0.1*(R5-10.0*S+12.0)*S*R2*R3;
543     R8:=-0.1*(R5-8.0*S+9.0)*S*R1*R3;
544     R9:=I30*(R5-6.0*S-4.0)*S*R1*R2;
545     R10:=0.1*H2*S*R1*R2*R3*R4;
546     R11:=-0.1*H2*R0*S*R1*R2*R3;
547     WRITE(UTT,UTSP);
548     WRITE(UTV,FOR I:=(1,1,N) DO
549       R6*UNM3(I)+R7*UNM2(I)+R8*UNM1(I)+R9*UN(I)+R10*FINM2(I)
550       +R11*FINM1(I));
551     FUTSP:=UTSP;
552     READ(UTSP,ENDPROC);
553     IF UTSP GTR B+&T THEN
554     BEGIN
555       WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET. ');
556       GO TO ENDPROC;
557     END;

```

```
558 IF FUTSP GTR UTSP THEN
559 BEGIN
560   WRITE(<<'*** UTSKRIFTSPUNKTENE LIGGER IKKE I STIGENDE REKKEFØLGE.''
561           A1,'*** DETTE MEDFØRER REDUSERT NØYAKTIGHET.',A1.1>>);
562 END;
563 GO TO UTSKRIFTSTEST;
564 NODATA: WRITE('*** BRUKER HAR IKKE SPESIFISERT UTSKRIFTSPUNKTER.');?>
565 ENDPROC: WRITE(<<'*** PROCEDURE PER ER TERMINERT.',A2.1>>);
566 END PROCEDURE PER;
```

6.8. Utskrift av PERDIAG.

ET*DIP.PERDIAG

```

1      PROCEDURE PERDIAG(F,A,B,H,YA,YDA,DF,N,EPS,EOP);
2          VALUE A,B,H,N,EPS,EOP;
3          REAL A,B,H,EPS;
4          INTEGER N,EOP;
5          ARRAY YA,YDA;
6          PROCEDURE F,DF;
7          BEGIN
8              ARRAY UNP1,UNP1S,UN,UNM1,UNM2,UNM3,UNM4,UNM5,UNM6,UNM7,
9                  FIN,FINM1,FINM2,FINM3,FINM4,FINM5,FINM6,FINM7,
10                 V1,V2,V3,V4,V5,W,Q2(1:N);
11                 SWITCH UVALG:=UV1,UV2,UV3,UV4;
12                 SWITCH FIVALG:=FIV1,FIV2,FIV3,FIV4;
13                 INTEGER I,J,ASEHE,ANTMH;
14                 REAL2 C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,
15                     R0,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
16                     K1,K2,K3,K4,K5,K6,K7,K8,K9,K10,K12,K25,
17                     Q,Q2I,Q4,IQ6,COSQ,ISINQ,QR,
18                     I192,I16,I3G2,I9G2,I10,I3G22,I2,I2G3,I12G11,
19                     I12,I3G10,I6G41,I6G35,I3G64,I3G52,I3,I128G35,
20                     I3G40,I3G28,I6G17,I6G11,I3G5,I8,I4,
21                     I64,I32G7,I128G5,I4G3,I8G3,
22                     I32G5,I128G3,I4G9,
23                     I32G13,I64G3,I32,I64G13,R,K1MR;
24                 REAL GN,GNM1,GNM2,GNM3,GNM4,TOCOSQUNMUNM1,
25                     FUTSP,UTSP,H2,HH,MH,MINEPS,MUW,TF,MAKSDIF,T,
26                     EK1,EK2,EI3G2,EI9G2,ET192,EK25,EI6,FI4,FI2G3,
27                     ER,ER0,ER1,ER2,ER3,ER4,ER5,ER6,ER7,ERR,ER9,ER10,ER11,
28                     BETA0,BETA1,BETA2,BETA3,BETA4,BETAS1,BETAS2,BETAS3,
29                     EC1,EC2,EC3,EC4,EC5,EC6,EC7,EC8,
30                     EQ2I,ECOSQ,ISINQ,EQ;
31                 BOOLEAN INR1,INR2; COMMENT INTEGRASJON NR. 1 OG 2;
32                 BOOLEAN EPSFORANDRET;
33                 FORMAT UTT('UTSKRIFTSPUNKT: *****',D18.8,X8,'*****',A2);
34                 FORMAT UTV('LØSNINGSVEKTOR:',A1,:N:(R17.9,X5),A2);
35                 PROCEDURE WEIGHT(EOP,U,N,W);
36                     COMMENT PROSEODYRE SOM OPPRETTER OG OPPDATERER FEILVEKTOREN W;
37                     VALUE EOP,U,N;
38                     INTEGER EOP,N;
39                     ARRAY U,W;
40                     BEGIN
41                         SWITCH E:=E1,E2,E3;
42                         INTEGER I;
43                         REAL S;
44                         GO TO E(EOP);
45                         E1: COMMENT ABSOLUTT;
46                             FOR I:=(1,1,N) DO W(I):=EK1;
47                             GO TO SLUTT;
48                         E2: COMMENT RELATIV;
49                             FOR I:=(1,1,N) DO
50                             BEGIN
51                                 S:=ABS(U(I));
52                                 W(I):=IF S LSS &-8 THEN &8 ELSE EK1/S;
53                             END I;
54                             GO TO SLUTT;
55                         E3: COMMENT BLANDET;
56                             FOR I:=(1,1,N) DO
57                             BEGIN
58                                 S:=ABS(U(I));
59                                 W(I):=IF S GTR EK1 THEN EK1/S ELSE EK1;
60                             END;
61                         SLUTT:

```

```

62      END PROCEDURE WEIGHT;
63      COMMENT
64      **** STARTTEST ****
65      IF EOP NEQ 1 AND EOP NEQ 2 AND EOP NEQ 3 THEN
66      BEGIN
67          WRITE('*** FEILOPSJON MÅ VÆRE 1, 2 ELLER 3.!');
68          GO TO ENDPROC;
69      END;
70      READ(UTSP,NODATA); COMMENT LESEN FØRSTE UTSKRIFTSPUNKT;
71      IF UTSP GTR B+&7 THEN
72      BEGIN
73          WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.!');
74          GO TO ENDPROC;
75      END;
76      COMMENT
77      **** INITIALISERING ****
78      BRUKER EN NYSTRØMMETODE AV ORDEN 5 SOM STARTMETODE.
79      DETTE ER EN RUNGE-KUTTA-METODE FOR INTEGRASJEN AV 2. ORDENS PROBLEMER
80      *           *           *           *           *           *
81      FØRST BEREGNES ENDEL VERDER SOM SKAL BRUKES OFTE I RUTINEN;
82      K1:=1.0&&0;
83      K2:=2.0&&0;
84      K3:=3.0&&0;
85      K4:=4.0&&0;
86      K5:=5.0&&0;
87      K6:=6.0&&0;
88      K7:=7.0&&0;
89      K8:=8.0&&0;
90      K9:=9.0&&0;
91      K10:=10.0&&0;
92      K12:=12.0&&0;
93      K25:=25.0&&0;
94      I192:=K1/192.0&&0;
95      I2:=K1/K2;
96      I3:=K1/K3;
97      I4:=I2*I2;
98      I6:=K1/K6;
99      I8:=K1/K8;
100     I12:=K1/K12;
101     I32:=I8*I4;
102     I2G3:=I2*K3;
103     I128G35:=35.0&&0/128.0&&0;
104     I12G11:=I12*11.0&&0;
105     I3G2:=K2*I3;
106     I9G2:=K2/K9;
107     I19:=K1/19.0&&0;
108     I3G10:=I3*K10;
109     I6G41:=I6*41.0&&0;
110     I6G35:=I6*35.0&&0;
111     I3G64:=I6*128.0&&0;
112     I3G52:=I6*104.0&&0;
113     I3G40:=I6*80.0&&0;
114     I3G28:=I6*56.0&&0;
115     I6G17:=I6*17.0&&0;
116     I6G11:=I6*11.0&&0;
117     I3G5:=I6*K10;
118     I3G22:=22.0&&0*I3;
119     I64:=K1/64.0&&0;
120     I64G3:=I64*K3;
121     I64G13:=I64*13.0&&0;
122     I32G13:=I64G13*K2;
123     I32G7:=I64*14.0&&0;

```

```

124 I128G5:=I64*2.5&&0;
125 I4G3:=I4*K3;
126 I8G3:=I2*I4G3;
127 I32G5:=I64*K10;
128 I128G3:=I64*1.5&&0;
129 I4G9:=I4*K9;
130 EK1:=1.0;
131 EK2:=2.0;
132 EK25:=25.0;
133 EI3G2:=2.0/3.0;
134 EI2G3:=1.5;
135 EI9G2:=2.0/9.0;
136 EI192:=1.0/192.0;
137 EI6:=1.0/6.0;
138 EI4:=1.0/4.0;
139 WRITE(UTT,A);
140 WRITE(UTV,YA);
141 FOR I:=(1,1,N) DO UNM4(I):=YA(I);
142 INR1:=TRUE;
143 COMMENT FØRST BEREGNING AV PASSE H;
144 STARTINTEGRASJON:
145 H2:=H*H;
146 EC1:=0.4*H;
147 EC2:=0.08*H2;
148 EC3:=EI3G2*H;
149 EC4:=EI9G2*H2;
150 EC5:=0.8*H;
151 EC6:=0.16*H2;
152 EC7:=EI192*H2;
153 EC8:=EI192*H;
154 T:=A;
155 J:=0;
156 FOR I:=(1,1,N) DO
157 BEGIN
158   UN(I):=YA(I);
159   UNM7(I):=YDA(I);
160 END I;
161 OPP:
162 J:=J+1;
163 F(T,UN,N,V1);
164 FOR I:=(1,1,N) DO
165 BEGIN
166   ER1:=UN(I);
167   ER2:=UNM7(I);
168   ER3:=V1(I);
169   V2(I):=ER1+EC1*ER2+EC2*ER3;
170   V3(I):=ER1+EC3*ER2+EC4*ER3;
171   V4(I):=ER1+EC5*ER2+EC6*ER3;
172 END I;
173 F(T+EC1,V2,N,V5);
174 F(T+EC3,V3,N,V2);
175 FOR I:=(1,1,N) DO
176   V4(I):=V4(I)+EC6*V5(I);
177 F(T+EC5,V4,N,V3);
178 FOR I:=(1,1,N) DO
179 BEGIN
180   ER0:=UN(I);
181   ER1:=23.0*V1(I);
182   ER2:=V5(I);
183   ER3:=V2(I);
184   ER4:=V3(I);
185   ER5:=UNM7(I);

```

```

296 ER6:=UN(I):=ER0+H*ER5+EC7*(ER1+75.0*ER2-27.0*FR3+K25*ER4);
297 UNM7(I):=UNM7(I)+EC8*(ER1+125.0*(ER2+ER4)-81.0*ER3);
298 IF INR1 THEN GO TO UV3;
299 GO TO UVALG(J);
300 UV1: UNM3(I):=ER6; GO TO UV4;
301 UV2: UNM2(I):=ER6; GO TO UV4;
302 UV3: UNM1(I):=ER6; GO TO UV4;
303 UV4:
304 END I;
305 IF INR1 THEN
306 BEGIN
307 H:=0.5*H;
308 INR1:=FALSE;
309 INR2:=TRUE;
310 GO TO STARTINTEGRASJON;
311 END;
312 IF INR2 AND J EQL 2 THEN
313 BEGIN
314 MAKSDIF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNM1(I)-UNM2(I)));
315 IF MAKSDIF LSS &-10 THEN
316 H:=SQRT(H*EPS)
317 ELSE
318 BEGIN
319 ER0:=0.5*(EPS/MAKSDIF)**16;
320 IF ER0 GTR 4.0 THEN ER0:=4.0;
321 H:=H*ER0;
322 END;
323 ER0:=UTSP-A;
324 IF ER0 GTR &-6 AND ER0 LSS 2.0*H THEN H:=0.5*ER0;
325 INR2:=FALSE;
326 GO TO STARTINTEGRASJON;
327 END;
328 FOR I:=(1,1,N) DO
329 BEGIN
330 GO TO FIVALG(J);
331 FIV1: FINM4(I):=V1(I);
332 FIV2: FINM3(I):=V1(I);
333 FIV3: FINM2(I):=V1(I);
334 FIV4: FINM1(I):=V1(I);
335 END I;
336 T:=T+H;
337 IF J LSS 4 THEN GO TO OPP;
338 F(T,UN,N,FIN);
339 DF(T,UN,N,Q2);
340 FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=-H2*Q2(I);
341 HH:=0.5*H;
342 HOVEDINTEGRASJON:
343 COMMENT
344 ***** PREDIKTERING *****
345 FOR I:=(1,1,N) DO
346 BEGIN
347 Q2I:=Q2(I);
348 EQ2I:=Q2I;
349 IF ABS(EQ2I) LSS &-12 THEN
350 BEGIN
351 WRITE('*** PERDIAG KAN IKKE BRUKES PA PROBLEMER MED');
352 WRITE('*** NULLELEMENTER PA JACOBIMATRISFDTAGONALEN. ');
353 GO TO ENDPROC;
354 END;
355 Q:=SQRT(Q2I);
356 EQ:=Q;
357 COSQ:=COS(Q);

```

```

ECOSQ:=COSQ;
Q4:=Q2I*Q2I;
IQ6:=K1/(Q4*Q2I);
GN:=H2*FIN(I)+E02I*UN(I);
GNM1:=H2*FINM1(I)+E02I*UNM1(I);
GNM2:=H2*FINM2(I)+E02I*UNM2(I);
GNM3:=H2*FINM3(I)+E02I*UNM3(I);
GNM4:=H2*FINM4(I)+E02I*UNM4(I);
TOCOSQUNMUNM1:=EK2*ECOSQ*UN(I)-UNM1(I);
BETA0:=IQ6*(K2-I6G41*Q2I+K5*Q4-(K2-I6G35*Q2I+K2*Q4)*COSQ);
BETA1:=IQ6*(-K8+I3G64*Q2I-K9*Q4+(K8-I3G52*Q2I)*COSQ);
BETA2:=IQ6*(K12-K25*Q2I+K10*Q4-(K12-19.0*Q2I)*COSQ);
BETA3:=IQ6*(-K8+I3G40*Q2I-K5*Q4+(K8-I3G28*Q2I)*COSQ);
BETA4:=IQ6*(K2-I6G17*Q2I+Q4-(K2-I6G11*Q2I)*COSQ);
UNP1S(I):=BETA0*GN+Beta1*GNM1+BETA2*GNM2+BETA3*GNM3+BETA4*GNM4
    +TOCOSQUNMUNM1;
V2(I):=IQ6*(K2-I6G17*Q2I+Q4-(K2-I6G11*Q2I)*COSQ);
BETAS1:=IQ6*(-K8+I3G22*Q2I+(K8-I3G10*Q2I-K2*Q4)*COSQ);
BETAS2:=IQ6*(K12-K7*Q2I+Q4-(K12-Q2I)*COSQ);
BETAS3:=IQ6*(-K8+I3G10*Q2I+(K8+I3G2*Q2I)*COSQ);
UNP1(I):=BETAS1*GN+BETAS2*GNM1+BETAS3*(GNM2-E14*GNM3)
    +TOCOSQUNMUNM1;

END I;
F(T+H,UNP1S,N,V1);
FOR I:=(1,1,N) DO UNP1(I):=UNP1(I)+V2(I)*(H2*V1(I)+Q2(I))*UNP1S(I);
COMMENT *** HAR NA FUNNET KORREKTOREN. ESTIMERER SA GLOBAL FEIL. ***
*** GLOBAL FEILE=LOKAL FEIL/H.

WEIGHT(EOP,UN,N,W);
TF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I)-UNP1S(I))*W(I))*I19;
MUW:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I))*W(I));
MINEPS:=1.49&-8*MUW; COMMENT MINSTE EPS EN KAN KREVE;
IF EPS LSS MINEPS THEN
BEGIN
  IF EPSFORANDRET THEN
    BEGIN
      WRITE(<<'*** RUTINEN KREVER NY EPSFORANDRING.',A1,
            '*** DETTE TYDER PA STADIG ØKENDE LØSNING.',A1,
            '*** MENS BRUKER ØNSKER ABSOLUTT FEILTESTING.',A1,
            '*** BRUK PLANDET FEIL: EOP=3.',A1.1>>);

      GO TO ENDPROC;
    END;
  EPSFORANDRET:=TRUE;
  EPS:=MINEPS;
  WRITE(<<'*** EPS ER KREVD FOR LITEN FOR DETTE PROBLEMET.',A1,
        '*** I FOPHOLD TIL DEN GITTE MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
        '*** EPS ER AV RUTINEN FORANDRET TIL ',R10.3,'.',A1.1>>,
        MINEPS);
END;
IF TF/H GTR EPS THEN
BEGIN
  COMMENT
    *** SKRITTET ER FOR STORT OG MA HALVERES. ***;
  MH:=1.49&-8*ARS(T);
  COMMENT
    *** MH ER MINSTE TILLATTE H PGA. MASKINNØYAKTIGHETEN. ***;
  IF 0.5*H LSS MH THEN
    BEGIN
      WRITE(<<'*** SKRITTET ER AV RUTINEN KREVD HALVERT.',A1,
            '*** DETTE ER IMIDLERTID UTILRADFLIG PGA DEN GITTE ',
            'MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
            '*** PRØVER DERFOR MED LITT FOR STORT SKRITT.',A1,
            '*** I HAP OM AT VANSKELIGHETEN FR LOKAL.',A1.1>>);
    END;
  END;

```

```

310      ANTMH:=ANTMH+1;
311      IF ANTMH GTR 3 THEN
312          BEGIN
313              WRITE(<<*** HAR NA BRUKT FOR STORT SKRITT 3 GANGER. ',A1,
314                  '*** DET ER UHOLDBART A FORTSETTE.',A1.1>>);
315          GO TO ENDPROC;
316      END;
317      GO TO NOCHANGE;
318  END
319      ELSE ANTMH:=0;
320      COMMENT
321      *** INTERPOLASJON FOR A FINNE U,N-1/2 OG U,N-3/2. ***
322      FOR I:=(1,1,N) DO
323          BEGIN
324              Q2I:=Q2(I);
325              EQ2I:=Q2I;
326              Q:=SQRT(Q2I);
327              EQ:=Q;
328              Q4:=Q2I*Q2I;
329              IQ6:=K1/(Q2I*Q4);
330              QR:=I2*Q;
331              ISINQ:=K1/SIN(Q);
332              EISINQ:=ISINQ;
333              R0:=SIN(QR)*ISINQ;
334              ER0:=R0;
335              R1:=(K1-COS(Q))*R0;
336              R2:=K1-COS(QR);
337              R3:=R1+R2;
338              R4:=(R0-I2)*Q2I;
339              R5:=-R1+R2;
340              ER6:=SIN(EQ*EI2G3)*EISINQ;
341              C1:=-I12G11*Q2I+K1;
342              C2:=Q4+I3G5*Q2I-K4;
343              C3:=Q2I+K3;
344              C4:=-I2*Q2I+K6;
345              C6:=I3*Q2I+K4;
346              C7:=I12*Q2I+K1;
347              GN:=H2*FIN(I)+EQ2I*UN(I);
348              GNM1:=H2*FINM1(I)+EQ2I*UNM1(I);
349              GNM2:=H2*FINM2(I)+EQ2I*UNM2(I);
350              GNM3:=H2*FINM3(I)+EQ2I*UNM3(I);
351              GNM4:=H2*FINM4(I)+EQ2I*UNM4(I);
352              UNM4(I):=UNM2(I);
353              BETA0:=IQ6*(C1*R3+R4+I12G35*Q4-I8G3*Q2I);
354              BETA1:=IQ6*(C2*R3-C3*R4-I32G13*Q4+I2G3*Q2I);
355              BETA2:=IQ6*(C4*R3+C3*R4-I64G3*Q4-I4G9*Q2I);
356              BETA3:=IQ6*(-C6*R3-R4+I32G7*Q4+I2G3*Q2I);
357              BETA4:=IQ6*(C7*R3-I128G5*Q4-I8G3*Q2I);
358              ER7:=ER6*UNM1(I)-ER0*UNM2(I)
359                  +BETA0*GN+BETA1*GNM1+BETA2*GNM2+BETA3*GNM3+BETA4*GNM4;
360              BETA0:=IQ6*(C1*R5-R4-I12G5*Q4+I8*Q2I);
361              BETA1:=IQ6*(C2*R5+C3*R4-I32*Q4-I2*Q2I);
362              BETA2:=IQ6*(C4*R5-C3*R4+I64G13*Q4+I4G3*Q2I);
363              BETA3:=IQ6*(-C6*R5+R4-I32G5*Q4-I2*Q2I);
364              BETA4:=IQ6*(C7*R5+I128G3*Q4+I8*Q2I);
365              ER8:=ER0*(UNM1(I)+UNM2(I))
366                  +BETA0*GN+BETA1*GNM1+BETA2*GNM2+BETA3*GNM3+BETA4*GNM4;
367              UNM2(I):=UNM1(I);
368              UNM1(I):=ER7;
369              UNM3(I):=ER8;
370              FINM4(I):=FINM2(I);
371              FINM2(I):=FINM1(I);

```

```

372 END I;
373 F(T-HH,UNM1,N,FINM1);
374 F(T-1.5*H,UNM3,N,FINM3);
375 ASEHE:=0;
376 H:=HH;
377 H2:=H*H;
378 HH:=0.5*H;
379 FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=0.25*Q2(I);
380 COMMENT
381 *** HAR NA GJORT KLAR TIL A INTEGRERE PA NYTT MED HALVERT SKRITT. *
382 GO TO HOVEDINTEGRASJON;
383 END FOR STOR H
384 ELSE
385 IF TF/H LSS 0.005*EPS AND ASEHE GEQ 3 THEN
386 BEGIN
387 COMMENT
388 *** SKRITTET VAR FOR LITE OG RØR DOBLES. SKRITTET AKSEPTERES. ***
389 HH:=H;
390 H:=EK2*H;
391 H2:=H*H;
392 DF(T+HH,UNP1,N,02);
393 FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=-H2*Q2(I);
394 F(T+HH,UNP1,N,FIN);
395 FOR I:=(1,1,N) DO
396 BEGIN
397 UN(I):=UNP1(I);
398 UNM2(I):=UNM3(I);
399 UNM3(I):=UNM5(I);
400 UNM4(I):=UNM7(I);
401 FINM2(I):=FINM3(I);
402 FINM3(I):=FINM5(I);
403 FINM4(I):=FINM7(I);
404 END I;
405 ASEHE:=0;
406 T:=T+HH;
407 GO TO UTSKRIFTSTEST;
408 END FOR LITEN H;
409 NOCHANGE;
410 COMMENT
411 *** H ER PASSE STOR ELLER ENDRING ER UMULIG. SKRITTET AKSEPTERES. *
412 LAGRER FI,N+1 I UNM7.;
413 ASEHE:=ASEHE+1;
414 FOR I:=(1,1,N) DO
415 BEGIN
416 UNM7(I):=UNM6(I);
417 UNM6(I):=UNM5(I);
418 UNM5(I):=UNM4(I);
419 UNM4(I):=UNM3(I);
420 UNM3(I):=UNM2(I);
421 UNM2(I):=UNM1(I);
422 UNM1(I):=UN(I);
423 UN(I):=UNP1(I);
424 FINM7(I):=FINM6(I);
425 FINM6(I):=FINM5(I);
426 FINM5(I):=FINM4(I);
427 FINM4(I):=FINM3(I);
428 FINM3(I):=FINM2(I);
429 FINM2(I):=FINM1(I);
430 FINM1(I):=FIN(I);
431 END I;
432 T:=T+H;
433 F(T,UNP1,N,FIN);

```

```

434 DF(T,UN,N,Q2);
435 FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=-H2*Q2(I);
436 COMMENT
437 *** HAR NA TATT ET PASSE SKRITT OG ER KLAR TIL A TA ET NYTT SKRITT.**
438 UTSKRIFTSTEST:
439 IF UTSP GTR T THEN GO TO HOVEDINTEGRASJON;
440 R:=K1+(UTSP-T)/H;
441 ER:=R;
442 R2:=I2*R*(R+K1);
443 R3:=-R2*(R+K2)*I3;
444 R4:=-R3*(R+K3)*I4;
445 R5:=K4*R4;
446 R6:=K3*R3;
447 C1:=R2-R3-R5;
448 C2:=K4*R2;
449 C3:=-K2*R2+R6+K6*R4;
450 C4:=K6*R2;
451 C5:=R2-R6-R5;
452 C6:=R3+R4;
453 FOR I:=(1,1,N) DO
454 BEGIN
455 Q2I:=Q2(I);
456 EQ2I:=Q2I;
457 Q:=SQRT(Q2I);
458 EQ:=Q;
459 Q4:=Q2I*Q2I;
460 IQ6:=K1/(Q2I*Q4);
461 QR:=Q*R;
462 ISINO:=K1/SIN(Q);
463 EISINO:=ISINO;
464 C7:=SIN(QR)*ISINO;
465 EC7:=C7;
466 C8:=(K1-COS(Q))*C7+K1-COS(QR);
467 C9:=(C7-R)*Q2I;
468 ER7:=IQ6*((-I12G11*Q2I+K1)*C8+C9+R4*Q4-R2*Q2I);
469 ER8:=IQ6*((04+I3G5*Q2I-K4)*C8-(Q2I+K3)*C9+C1*Q4+C2*Q2I);
470 ER9:=IQ6*((-I2*Q2I+K6)*C8+(Q2I+K3)*C9+C3*Q4-C4*Q2I);
471 ER10:=IQ6*(-(I3*Q2I+K4)*C8-C9+C5*Q4+C2*Q2I);
472 ER11:=IQ6*((I12*Q2I+K1)*C8+C6*Q4-R2*Q2I);
473 GN:=H2*FIN(I)+EQ2I*UN(I);
474 GNM1:=H2*FINM1(I)+EQ2I*UNM1(I);
475 GNM2:=H2*FINM2(I)+EQ2I*UNM2(I);
476 GNM3:=H2*FINM3(I)+EQ2I*UNM3(I);
477 GNM4:=H2*FINM4(I)+EQ2I*UNM4(I);
478 V1(I):=EISINO*(SIN(E0*(ER+1.0)))*UNM1(I)-FC7*UNM2(I)
479 +ER7*GN+ER8*GNM1+ER9*GNM2+ER10*GNM3+ER11*GNM4;
480 END I;
481 WRITE(UTT,UTSP);
482 WRITE(UTV,FOR I:=(1,1,N) DO V1(I));
483 FUTSP:=UTSP;
484 READ(UTSP,ENDPROC);
485 IF UTSP GTR B+&-7 THEN
486 BEGIN
487 WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.!');
488 GO TO ENDPROC;
489 END;
490 IF FUTSP GTR UTSP THEN
491 BEGIN
492 WRITE(<<'*** UTSKRIFTSPUNKTENE LIGGER IKKE I STIGENDE REKKEFOLGE.'!
493 A1,'*** DETTE MEDFØRER REDUSERT NØYAKTIGHET.'>>);
494 END;
495 GO TO UTSKRIFTSTEST;
496 NODATA: WRITE('*** BPUKER HAR IKKE SPESIFISERT UTSKRIFTSPUNKTER.!');
497 ENDPROC: WRITE(<<'*** PROCEDURE PERDIAG ER TERMINERT.'>>);
498 END PROCEDURE PERDIAG;

```

6.9. Utskrift av SC4.

SC4

```

1 PROCEDURE SC4(F,A,B,H,YA,YDA,N,EPS,EOP);
2   VALUE A,B,H,N,EPS,EOP;
3   REAL A,B,H,EPS;
4   INTEGER N,EOP;
5   ARRAY YA,YDA;
6   PROCEDURE F;
7   BEGIN
8     ARRAY UNP1,UNP1S,UN,UNM1,UNM2,UNM3,UNM4,UNM5,UNM6,UNM7,
9       FIN,FINM1,FINM2,FINM3,FINM4,FINM5,FINM6,FINM7;
10    V1,V2,V3,V4,V5,W(1:N);
11    SWITCH UVALG:=UV1,UV2,UV3,UV4;
12    SWITCH FIVALG:=FIV1,FIV2,FIV3,FIV4;
13    INTEGER I,J,ASEHE,ANTMH;
14    REAL C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,
15      R0,R1,R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,R10,R11,
16      H2,HH,
17      I192,I240,I6,I30,I3G2,I9G2,
18      I19,I240G299,I15G11,I120G97,I5G2,
19      I240G19,I20G17,I60,
20      I120G7,I12,
21      FUTSP,UTSP,S,MH,MINEPS,MUW,TF,MAKSDIF,T;
22  BOOLEAN INR1,INR2; COMMENT INTEGRASJON NR. 1 OG 2;
23  BOOLEAN EPSFORANDRET;
24  FORMAT UTT('UTSKRIFTSPUNKT: *****,D18.8,X8,*****,A2);
25  FORMAT UTV('LØSNINGSVEKTOR:',A1,:N:(R17.9,X5),A2);
26  PROCEDURE WEIGHT(EOP,U,N,W);
27    COMMENT PROSEODYRE SOM OPPRETTER OG OPPDATERER FEILVEKTOREN W;
28    VALUE EOP,U,N;
29    INTEGER EOP,N;
30    ARRAY U,W;
31    BEGIN
32      SWITCH E:=E1,E2,E3;
33      INTEGER I;
34      REAL S;
35      GO TO E(EOP);
36      E1: COMMENT ABSOLUTT;
37      FOR I:=(1,1,N) DO W(I):=1.0;
38      GO TO SLUTT;
39      E2: COMMENT RELATIV;
40      FOR I:=(1,1,N) DO
41      BEGIN
42        S:=ABS(U(I));
43        W(I):=IF S LSS &-8 THEN &8 ELSE 1.0/S;
44      END I;
45      GO TO SLUTT;
46      E3: COMMENT BLANDET;
47      FOR I:=(1,1,N) DO
48      BEGIN
49        S:=ABS(U(I));
50        W(I):=IF S GTR 1.0 THEN 1.0/S ELSE 1.0;
51      END;
52      SLUTT;
53    END PROCEDURE WEIGHT;
54  COMMENT
***** STARTTEST *****
55  IF EOP NEQ 1 AND EOP NEQ 2 AND EOP NEQ 3 THEN
56  BEGIN
57    WRITE('*** FEILOPSJON MA VARE 1, 2 ELLER 3.!');
58    GO TO ENDPROC;
59  END;
60  READ(UTSP,NODATA); COMMENT LESER FØRSTE UTSKRIFTSPUNKT;
61

```

```

62     IF UTSP GTR B+8-7 THEN
63     BEGIN
64       WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET. ');
65       GO TO ENDPROC;
66     END;
67     COMMENT
68     **** INITIALISERING ****
69     BRUKER EN NYSTRØMMETODE AV ORDEN 5 SOM STARTMETODE.
70     DETTE ER EN RUNGE-KUTTA-METODE FOR INTEGRASJFN AV 2. ORDENS PROBLEMER
71     *           *           *           *           *           *
72     FØRST BEREGNES ENDEL VERDER SOM SKAL BRUKES OFTE I RUTINEN:
73     I192:=1.0/192.0;
74     I240:=1.0/240.0;
75     I6:=1.0/6.0;
76     I12:=1.0/12.0;
77     I30:=1.0/30.0;
78     I3G2:=2.0/3.0;
79     I9G2:=2.0/9.0;
80     I19:=1.0/19.0;
81     I240G299:=299.0/240.0;
82     I15G11:=11.0/15.0;
83     I120G97:=97.0/120.0;
84     I5G2:=0.4;
85     I240G19:=19.0/240.0;
86     I20G17:=17.0/20.0;
87     I60:=1.0/60.0;
88     I120G7:=7.0/120.0;
89     WRITE(UTT,A);
90     WRITE(UTV,YA);
91     FOR I:=(1,1,N) DO UNM4(I):=YA(I);
92     INR1:=TRUE;
93     COMMENT FØRST BEREGNING AV PASSE H;
94     STARTINTEGRASJON:
95     H2:=H*H;
96     C1:=0.4*H;
97     C2:=0.08*H2;
98     C3:=I3G2*H1;
99     C4:=I9G2*H2;
100    C5:=0.8*H;
101    C6:=0.16*H2;
102    C7:=I192*H2;
103    C8:=I192*H;
104    T:=A;
105    J:=0;
106    FOR I:=(1,1,N) DO
107      BEGIN
108        UN(I):=YA(I);
109        UNM7(I):=YDA(I);
110      END I;
111      OPP:
112      J:=J+1;
113      F(T,UN,N,V1);
114      FOR I:=(1,1,N) DO
115        BEGIN
116          R1:=UN(I);
117          R2:=UNM7(I);
118          R3:=V1(I);
119          V2(I):=R1+C1*R2+C2*R3;
120          V3(I):=R1+C3*R2+C4*R3;
121          V4(I):=R1+C5*R2+C6*R3;
122        END I;
123        F(T+C1,V2,N,V5);

```

```

124 F(T+C3,V3,N,V2);
125 FOR I:=(1,1,N) DO
126 V4(I):=V4(I)+C6*V5(I);
127 F(T+C5,V4,N,V3);
128 FOR I:=(1,1,N) DO
129 BEGIN
130   R0:=UN(I);
131   R1:=23.0*V1(I);
132   R2:=V5(I);
133   R3:=V2(I);
134   R4:=V3(I);
135   R5:=UNM7(I);
136   R6:=UN(I):=R0+H*R5+C7*(R1+75.0*R2-27.0*R3+25.0*R4);
137   UNM7(I):=UNM7(I)+C8*(R1+125.0*R2-81.0*R3+125.0*R4);
138   IF INR1 THEN GO TO UV3;
139   GO TO UVALG(J);
140   UV1: UNM3(I):=R6; GO TO UV4;
141   UV2: UNM2(I):=R6; GO TO UV4;
142   UV3: UNM1(I):=R6; GO TO UV4;
143   UV4:
144 END I;
145 IF INR1 THEN
146 BEGIN
147   H:=0.5*H;
148   INR1:=FALSE;
149   INR2:=TRUE;
150   GO TO STARTINTEGRASJON;
151 END;
152 IF INR2 AND J EQL 2 THEN
153 BEGIN
154   MAKSDIF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNM1(I)-UNM2(I)));
155   IF MAKSDIF LSS &-10 THEN
156     H:=SQRT(H*EPS);
157   ELSE
158     BEGIN
159       R0:=0.5*(EPS/MAKSDIF)**I6;
160       IF R0 GTR 4.0 THEN R0:=4.0;
161       H:=H*R0;
162     END;
163   R0:=UTSP-A;
164   IF R0 GTR &-6 AND R0 LSS 2.0*H THEN H:=0.5*R0;
165   INR2:=FALSE;
166   GO TO STARTINTEGRASJON;
167 END;
168 FOR I:=(1,1,N) DO
169 BEGIN
170   GO TO FIVALG(J);
171   FIV1: FINM4(I):=V1(I);
172   FIV2: FINM3(I):=V1(I);
173   FIV3: FINM2(I):=V1(I);
174   FIV4: FINM1(I):=V1(I);
175 END I;
176 T:=T+H;
177 IF J LSS 4 THEN GO TO OPP;
178 F(T,UN,N,FIN);
179 HH:=0.5*H;
180 HOVEDINTEGRASJON:
181 COMMENT
182 **** PREDIKTERING ****
183 FOR I:=(1,1,N) DO
184 BEGIN
185   V1(I):=2.0*UN(I)-UNM1(I);

```

```

186 UNP1S(I):=V1(I)+H2*(I240G299*FIN(I)-I15G11*FINM1(I)+I120G7*FINM2(I)
187 -I5G2*FINM3(I)+I240G19*FINM4(I));
188 END I;
189 COMMENT **** KORRIGERING ****
190 COMMENT LAGRER FI,N+1 I V2;
191 F(T+H,UNP1S,N,V2);
192 FOR I:=(1,1,N) DO
193 BEGIN
194 UNP1(I):=V1(I)+H2*(I240G19*V2(I)+I20G17*FIN(I)+I120G7*FINM1(I)
195 +I60*FINM2(I)-I240*FINM3(I));
196 END I;
197 COMMENT *** HAR NA FUNNET KORREKTOREN. ESTIMERER SA GLOBAL FEIL. ***
198 *** GLOBAL FEIL=LOKAL FEIL/H.
199
200 WEIGHT(EOP,UN,N,W);
201 TF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I)-UNP1S(I))*W(I))*I19;
202 MUW:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I))*W(I));
203 MINEPS:=1.498-8*MUW; COMMENT MINSTE EPS EN KAN KREVE;
204 IF EPS LSS MINEPS THEN
205 BEGIN
206 IF EPSFORANDRET THEN
207 BEGIN
208 WRITE(<<'*** RUTINEN KREVER NY EPSFORANDRING.',A1,
209 '*** DETTE TYDER PÅ STADIG ØKENDE LØSNING.',A1,
210 '*** MENS BRUKER ØNSKER ABSOLUTT FFILTESTING.',A1,
211 '*** BRUK BLANDET FEIL: EOP=3.',A1.1>>);
212 GO TO ENDPROC;
213 END;
214 EPSFORANDRET:=TRUE;
215 EPS:=MINEPS;
216 WRITE(<<'*** EPS ER KREVD FOR LITEN FOR DETTE PROBLEMET',A1,
217 '*** I FORHOLD TIL DEN GITTE MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
218 '*** EPS ER AV RUTINEN FORANDRET TIL ',R10.3.',A1.1>>,
219 MINEPS);
220 END;
221 IF TF/H GTR EPS THEN
222 BEGIN
223 COMMENT
224 *** SKRITTET ER FOR STORT OG MA HALVERES. ***;
225 MH:=1.498-8*ABS(T);
226 COMMENT
227 *** MH ER MINSTE TILLATTE H PGA. MASKINNØYAKTIGHETEN. ***;
228 IF 0.5*H LSS MH THEN
229 BEGIN
230 WRITE(<<'*** SKRITTET ER AV RUTINEN KREVD HALVERT.',A1,
231 '*** DETTE ER IMIDLERTID UTILRADELIG PGA DEN GITTE ',
232 'MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
233 '*** PRØVER DERFOR MED LITT FOR STORT SKRITT',A1,
234 '*** I HÅP OM AT VANSKELIGHETEN ER LOKAL.',A1.1>>);
235 ANTMH:=ANTMH+1;
236 IF ANTMH GTR 3 THEN
237 BEGIN
238 WRITE(<<'*** HAR NA BRUKT FOR STORT SKRITT 3 GANGER.',A1,
239 '*** DET ER UHOLDBART Å FORTSETTE.',A1.1>>);
240 GO TO ENDPROC;
241 END;
242 GO TO NOCHANGE;
243 END
244 ELSE ANTMH:=0;
245 COMMENT
246 *** INTERPOLASJON FOR A FINNE U,N-1/2 OG U,N-3/2. ***;
247 R2:=0.140625*H2;

```

```

R3:=0.328125*H2;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
  R0:=0.078125*(UNM3(I)+UN(I))+0.421875*(UNM2(I)+UNM1(I))
  -R2*(FINM2(I)+FINM1(I));
  R1:=-0.078125*UNM3(I)-0.359375*UNM2(I)+1.453125*UNM1(I)
  -0.015625*UN(I)+R2*FINM2(I)+R3*FINM1(I);
  UNM4(I):=UNM2(I);
  UNM3(I):=R0;
  UNM2(I):=UNM1(I);
  UNM1(I):=R1;
  FINM4(I):=FINM2(I);
  FINM2(I):=FINM1(I);
END I;
F(T-HH,UNM1,N,FINM1);
F(T-1.5*H,UNM3,N,FINM3);
ASEHE:=0;
H:=HH;
H2:=H*H;
HH:=0.5*H;
COMMENT
*** HAR NA GJORT KLAR TIL A INTEGRERE PA NYTT MED HALVERT SKRITT. ***
GO TO HOVEDINTEGRASJON;
END FOR STOR H
ELSE
IF TF/H LSS 0.005*EPS AND ASEHE GEQ 3 THEN
BEGIN
  COMMENT
  *** SKRITTET VAR FOR LITE OG BØR DOBLES. SKPITTET AKSEPTERES. ***
  HH:=H;
  H:=2.0*H;
  H2:=H*H;
  F(T+HH,UNP1,N,FIN);
  FOR I:=(1,1,N) DO
  BEGIN
    UN(I):=UNP1(I);
    UNM2(I):=UNM3(I);
    UNM3(I):=UNM5(I);
    UNM4(I):=UNM7(I);
    FINM2(I):=FINM3(I);
    FINM3(I):=FINM5(I);
    FINM4(I):=FINM7(I);
  END I;
  ASEHE:=0;
  T:=T+HH;
  GO TO UTSKRIFTSTEST;
END FOR LITEN H;
NOCHANGE;
COMMENT
*** H ER PASSE STOR ELLER ENDRING ER UMULIG. SKRITTET AKSEPTERFS. ***
LAGRER FI,N+1 I UNM7.1;
ASEHE:=ASEHE+1;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
  UNM7(I):=UNM6(I);
  UNM6(I):=UNM5(I);
  UNM5(I):=UNM4(I);
  UNM4(I):=UNM3(I);
  UNM3(I):=UNM2(I);
  UNM2(I):=UNM1(I);
  UNM1(I):=UN(I);
  UN(I):=UNP1(I);

```

```

310   FINM7(I):=FINM6(I);
311   FINM6(I):=FINM5(I);
312   FINM5(I):=FINM4(I);
313   FINM4(I):=FINM3(I);
314   FINM3(I):=FINM2(I);
315   FINM2(I):=FINM1(I);
316   FINM1(I):=FIN(I);
317 END I;
318 T:=T+H;
319 F(T,UNP1,N,FIN);
320 COMMENT
321 *** HAR NA TATT ET PASSE SKRITT OG ER KLAR TIL A TA ET NYTT SKRITT.**
322 UTSKRIFTSTEST:
323 IF UTSP GTR T THEN GO TO HOVEDINTEGRASJON;
324 S:=3.0+(UTSP-T)/H;
325 R0:=S+1.0;
326 R1:=S-1.0;
327 R2:=S-2.0;
328 R3:=S-3.0;
329 R4:=S-4.0;
330 R5:=3.0*S*S;
331 R6:=-I30*(R5-12.0*S+5.0)*R1*R2*R3;
332 R7:=0.1*(R5-10.0*S+12.0)*S*R2*R3;
333 R8:=-0.1*(R5-8.0*S+9.0)*S*R1*R3;
334 R9:=I30*(R5-6.0*S-4.0)*S*R1*R2;
335 R10:=0.1*H2*S*R1*R2*R3*R4;
336 R11:=-0.1*H2*R0*S*R1*R2*R3;
337 WRITE(UTT,UTSP);
338 WRITE(UTV,FOR I:=(1,1,N) DO
339   R6*UNM3(I)+R7*UNM2(I)+R8*UNM1(I)+R9*UN(I)+R10*FINM2(I)
340   +R11*FINM1(I));
341 FUTSP:=UTSP;
342 READ(UTSP,ENDPROC);
343 IF UTSP GTR B+8-7 THEN
344 BEGIN
345   WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET. ');
346   GO TO ENDPROC;
347 END;
348 IF FUTSP GTR UTSP THEN
349 BEGIN
350   WRITE(<<'*** UTSKRIFTSPUNKTENE LIGGER IKKE I STIGENDE REKKEFØLGE. '
351   A1,'*** DETTE MEDFØRER REDUSERT NØYAKTIGHET.',A1.1>>);
352 END;
353 GO TO UTSKRIFTSTEST;
354 NODATA: WRITE('*** BRUKER HAR IKKE SPESIFISERT UTSKRIFTSPUNKTER. ');
355 ENDPROC: WRITE(<<'*** PROCEDURE SC4 ER TERMINERT.',A2.1>>);
356 END PROCEDURE SC4;

```

7. TEST AV RUTINENE.

Som beskrevet i foregående kapitler er det laget tre rutiner bygd på de metoder som er beskrevet tidligere.

PERDIAG bygger uten tilnærmelser på prediktor-korrektormetoden TTSC₄ basert på de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder med k=4 (Orden 5). Rutinen muliggjør trigonometrisk tilpasning med en diagonalmatrise. I testene brukes Jacobimatrisen hvis denne er diagonal, ellers en diagonal tilnærmelse til denne.

PER bygger også på TTSC₄, men anvender polynomisk approksimasjon til cosQ, hvor Q er en generell reell matrise. Rutinen kan tilpasse med en vilkårlig reell matrise. I testene anvendes systemets Jacobimatrice.

SC4 er bygd over en prediktor-korrektormetode basert på Størmers og Cowells metode med k=4 (Orden 5). Den anvender altså ingen trigonometrisk tilpasning.

Alle rutinene bruker samme administrative instruksjoner og har samme startmetode. De er kodet uten sikre dummyoperasjoner (addisjoner og multiplikasjoner med null og liknende). Som startmetode gjøres bruk av en Nyströmmetode av orden 5 for løsning av baneproblemer ($\ddot{\vec{y}} = \vec{f}(x, \vec{y})$). PER og SC4 bruker polynomisk interpolasjon ved halvering av skritt og utskrift i vilkårlige punkter. De tre rutinene er listet i kapittel 6.

Rutinene er testet ved hjelp av 8 testproblemer (betegnet T1-T8). Avhengig av problemets art er det bedt om absolutt, relativ eller blandet feilestimering i rutinene. Med blandet feil menes her absolutt feil for komponenter som er mindre enn eller lik 1 i absoluttverdi, ellers relativ feil.

7.1. Testproblemer.

T1:

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Løsning: } \vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$$

Absolutt feilestimering.

T2:

$$y'' = -y + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$\text{Løsning: } y = \sin x + \frac{1}{1+x}$$

Absolutt feilestimering.

T3:

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 20x^3+x^5 \\ 12x^2+4x^4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Løsning: } \vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x + x^5 \\ \sin 2x + x^4 \end{pmatrix}$$

Blandet feilestimering.

T4:

$$\ddot{y}'' = 100(\cos 2x - 1)y$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

"Løsningen" er beregnet ved hjelp av en rutine som løser stive 1. ordens system. Feilen ligger rundt 10^{-7} .

Blandet feilestimering.

T5:

$$\ddot{\vec{Y}}'' = -\frac{1}{|\vec{Y}|^3} \vec{Y} \quad (\text{Newtons gravitasjonslov med skalerte enheter})$$

$$\vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Løsning: } \vec{Y} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

Absolutt feilestimering.

T6:

$$\ddot{\vec{Y}}'' = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -131 & 30 \\ 180 & -56 \end{pmatrix} \vec{Y}$$

$$\vec{Y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{Y}'(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

fra T5 hvor diagonalene ikke er diagonale, der brukes

$$\text{Løsning: } \vec{Y} = \begin{pmatrix} \cos x + 2\cos 4x + \sin x + 2\sin 4x \\ 4\cos x - 3\cos 4x + 4\sin x - 3\sin 4x \end{pmatrix}$$

Absolutt feilestimering.

T7:

7.1. Presentasjon av løsningstilfattene.

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} x^5 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

For hvert tilfelleproblem er det valgt 5 x-verdier som

tsessingen er beregnet ved hjelpe tilfattene. Global feil
er beregnet (avhengig av tilfattene) for problemet.

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

absolute, relativ eller absolutrelativ. For overintegrasjon er anvendt
absolutverdigat (som opp i tilfattene) nedskrevet.

Løsning: $\vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42}x^7 + 1 \\ \frac{1}{30}x^6 - x + 4 \end{pmatrix}$

Relativ feilestimering.

Bruket globalt maksvervingsmidde

T8:

feil eps = 1 millimeter

$$y'' = \frac{y}{x^2} ((\ln y + x)^2 + x)$$

Utskriftsinterval: 1 til 1000

punkter: $y(1) = 1, y'(1) = 1$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

Løsning: $y = x^x$

Relativ feilestimering.

Alle rutinene er anvendt på T1-T5. PERDIAG er ikke prøvd
på T6-T8. I PER brukes tilpasningen

$A^2 = -\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ i alle tilfelle. Dette gjelder også PERDIAG bortsett

fra for T5 hvor Jacobimatrissen ikke er diagonal. Her brukes

$$A^2 = -\frac{1}{|\vec{y}|^3} I .$$

Vi har spesifisert estimert global feil "eps" lik 10^{-2} ,
 10^{-4} og 10^{-6} for alle problemer.

Diagrammet viser følgende i tilfelle T1-T5:

i de tilfelle hvor beregnet global feil er likt spesifisert

korrelert til ønsket global i tilfelle at en sannhet nedsatt til

1 til 3 for bestoddavis $\text{eps}=10^{-2}$, 10^{-4} og 10^{-6} .

Disse kurvene danner grunnlaget for enkelte eksperimentelle
messverdiene og også ikke rett med i målet. Det kan ikke finnes
systemene der er testet på vil ikke være etterspørslig utvidning.

7.2. Presentasjon av testresultatene.

For hvert testproblem er det valgt 5 x-verdier hvor løsningen er beregnet ved hjelp av de tre rutinene. Global feil er beregnet (svarende til type feilestimering for problemet: absolutt, relativ eller blandet). For hver integrasjon er anvendt eksekveringstid (som oppgis av datamaskinsystemet) nedskrevet. Disse resultater presenteres i tabellene 7.1-8 som angitt i figur 7.1.

	PER	PERDIAG	SC4
Ønsket global feil eps	Eksekveringstid i millisekunder		
Utskriftspunkter	Global feil i 1. komp.	Global feil i 2. komp.	
x_1			
x_2			
x_3			
x_4			
x_5			

Figur 7.1. Struktur for tabellene 7.1-8.

Størst feil på integrasjonsintervallet er understreket. Der hvor systemet ikke er koplet (diagonal Jacobimatrise) er feilene i hver komponent behandlet atskilt. Disse understrekete feil er plottet inn i feil-tid-(e-t⁻ⁿ) diagrammer på dobbeltlogaritmisk papir, en figur pr. ukoplet komponent. På grunnlag av de tre punktene for hver rutine er det trukket en omtrentlig lineær regresjonskurve. Diagrammene foreligger i figurene 7.2-12. I de tilfelle hvor beregnet global feil e ikke er positivt korrelert til ønsket global feil eps, er punktene nummerert med 1, 2 og 3 for henholdsvis $\text{eps}=10^{-2}$, 10^{-4} og 10^{-6} .

Disse kurvene danner grunnlaget for vurdering av rutinene. Plassforbruket er altså ikke tatt med i undersøkelsen. For de små systemene det er testet på vil ikke dette være av særlig betydning.

Problemet Tl

I Tl for eksempel krever rutinene PER, PERDIAG og SC4 (inklusive funksjons- og Jacobirutine) henholdsvis 8948/5199, 8683/5524 og 6747/5153 hvor første tall angir plassforbruk for instruksjoner og siste tall for variable, alt regnet i datamaskinord.

Dette aspektarter seg altså nokså likt for disse små systemene. For større systemer vil PER etterhvert atskille seg fra de to andre i ugunstig retning, mens PERDIAG og SC4 stort sett vil følge hverandre.

Avrundingsfeilen i den datamaskinen som er brukt (UNIVAC 1108) er $1.5 \cdot 10^{-8}$. I PERDIAG er det brukt dobbelt nøyaktighet ved beregning av koeffisientene. Avrundingfeilen i dette tilfelle er $1.7 \cdot 10^{-18}$.

	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
1.	1.97, -6 2.07, -6 2.01, -6 3.02, -6	1.79, -6 7.01, -6		
2.	1.70, -6 1.63, -6 2.10, -6 3.03, -6	4.43, -6 2.23, -6		
3.	1.36, -6 2.01, -6 2.00, -6 3.01, -6	8.21, -6 1.32, -6		
4.	1.01, -6 1.01, -6 2.00, -6 3.01, -6	7.31, -6 1.16, -6		
5.	1.01, -6 1.01, -6 2.00, -6 3.01, -6	8.60, -6 1.72, -6		
	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}	10^{-11}
1.	5.78, -8 1.41, -8 8.32, -8 1.77, -8	6.21, -8 0.46, -8		
2.	1.90, -8 1.32, -8 5.41, -8 3.36, -8	7.00, -8 2.27, -8		
3.	1.93, -8 1.12, -8 4.00, -8 1.76, -8	3.10, -8 1.05, -8		
4.	1.25, -8 0.78, -8 4.00, -8 1.76, -8	1.81, -8 1.67, -8		
5.	1.01, -8 1.01, -8 1.63, -8 2.07, -8	4.26, -8 2.27, -8		

Tilslutning

Problem: T1

	PER	PERDIAG		SC4	
10^{-2}	964		158	412	
1.0	8.22, -8	1.08, -5	1.63, -7	<u>1.08, -5</u>	5.92, -8
π	1.35, -5	7.80, -5	9.00, -8	6.86, -6	5.27, -5
2π	1.33, -5	1.49, -4	6.00, -8	6.89, -6	1.27, -4
10π	<u>2.73, -4</u>	1.82, -2	<u>1.16, -5</u>	5.93, -6	2.04, -4
20π	2.61, -4	<u>5.23, -2</u>	2.09, -7	2.95, -6	<u>5.49, -4</u>
10^{-4}	1139		171	949	
1.0	1.87, -7	8.07, -6	2.01, -7	3.82, -7	1.79, -7
π	1.90, -5	1.03, -3	2.10, -7	3.58, -7	4.43, -6
2π	1.30, -6	2.74, -5	2.20, -7	6.26, -7	8.21, -6
10π	<u>1.65, -4</u>	6.10, -2	2.20, -7	2.00, -6	3.31, -5
20π	9.81, -5	<u>2.68, -1</u>	<u>2.80, -6</u>	<u>4.26, -6</u>	<u>6.60, -5</u>
10^{-6}	2748		187	1906	
1.0	5.28, -8	1.42, -5	<u>8.86, -7</u>	5.27, -7	6.71, -7
π	7.00, -8	1.22, -6	5.70, -7	5.36, -7	7.00, -8
2π	1.90, -7	1.72, -6	5.80, -7	5.70, -7	3.00, -7
10π	<u>1.25, -5</u>	4.78, -4	4.20, -7	1.22, -6	1.83, -6
20π	2.61, -6	<u>9.16, -4</u>	4.60, -7	<u>2.63, -6</u>	<u>4.26, -6</u>

Tabell 7.1.

Problem: T2

	PER	PERDIAG	SC4
10^{-2}	380	131	197
1.0	2.80, -6	1.54, -6	3.22, -6
π	1.12, -4	2.08, -4	1.66, -4
2π	3.13, -3	7.18, -4	2.19, -3
10π	6.76, -3	4.48, -4	<u>4.65, -3</u>
20π	1.26, -2	1.55, -3	2.77, -3
10^{-4}	486	162	338
1.0	7.66, -6	4.74, -6	7.54, -6
π	4.76, -5	4.00, -5	4.92, -5
2π	1.50, -6	2.36, -5	5.84, -5
10π	1.13, -3	7.09, -5	6.48, -5
20π	1.00, -2	1.53, -4	<u>2.54, -4</u>
10^{-6}	989	293	697
1.0	2.66, -6	4.32, -6	8.65, -7
π	4.34, -6	8.66, -6	2.68, -6
2π	3.09, -6	8.55, -6	3.28, -6
10π	2.19, -5	1.15, -5	4.58, -5
20π	4.78, -5	1.35, -5	<u>1.08, -4</u>

Tabell 7.2.

Problem: T3

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	430		232		139	
0.01	2.85,-7	1.51,-8	3.54,-8	2.26,-9	2.85,-7	1.79,-8
0.1	1.60,-7	1.27,-8	1.05,-6	8.77,-8	1.97,-7	2.83,-8
1.0	3.50,-6	5.15,-7	7.19,-6	9.94,-7	2.95,-6	8.75,-8
2.0	1.83,-5	2.15,-6	1.71,-5	4.66,-8	2.45,-7	2.42,-5
4.0	3.10,-6	2.64,-7	5.71,-5	6.30,-8	4.34,-7	6.41,-5
10^{-4}	340		245		141	
0.01	2.85,-7	1.51,-8	3.54,-8	2.26,-9	2.85,-7	1.79,-8
0.1	1.60,-7	1.27,-8	1.05,-6	8.77,-8	1.97,-7	2.83,-8
1.0	3.50,-6	5.15,-7	7.19,-6	9.94,-7	2.95,-6	8.75,-8
2.0	1.09,-6	2.05,-6	4.14,-7	8.59,-8	7.73,-8	7.47,-7
4.0	2.55,-6	2.91,-7	2.46,-6	1.10,-7	7.43,-8	3.54,-6
10^{-6}	524		397		179	
0.01	2.85,-7	1.51,-8	3.54,-8	2.26,-9	2.85,-7	1.79,-8
0.1	1.75,-7	1.27,-8	1.81,-6	2.35,-7	2.83,-8	2.83,-8
1.0	4.71,-7	6.65,-8	2.36,-5	2.70,-6	2.95,-6	3.11,-7
2.0	1.57,-7	5.18,-8	1.66,-6	1.19,-7	1.09,-7	5.31,-8
4.0	1.37,-8	1.53,-7	2.40,-7	2.58,-7	4.50,-8	1.37,-7

Tabell 7.3.

Problem: T4

	PER	PERDIAG	SC4
10^{-2}	243	161	99
0.1	5.84,-3	4.06,-7	<u>5.71,-3</u>
0.2	5.90,-6	1.75,-6	5.90,-6
0.5	1.35,-4	1.49,-4	2.66,-4
1.0	<u>6.71,-3</u>	<u>5.50,-3</u>	3.16,-3
2.0	3.75,-3	2.71,-3	3.38,-3
10^{-4}	447	289	175
0.1	2.54,-5	4.06,-7	2.54,-5
0.2	4.66,-6	1.75,-6	4.65,-6
0.5	4.67,-6	2.61,-6	1.72,-5
1.0	3.38,-5	<u>6.35,-5</u>	3.98,-5
2.0	<u>3.56,-5</u>	1.10,-5	<u>5.17,-4</u>
10^{-6}	1009	434	406
0.1	4.14,-7	3.99,-7	4.14,-7
0.2	1.75,-6	1.64,-6	1.76,-6
0.5	8.91,-8	1.66,-6	1.21,-8
1.0	1.34,-5	1.07,-5	9.39,-6
2.0	<u>3.01,-5</u>	<u>2.71,-5</u>	<u>2.19,-5</u>

Tabell 7.4.

Problem: T5

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	2068		326		561	
1.0	7.52,-7	9.48,-8	8.27,-7	1.10,-7	6.92,-7	1.10,-7
π	2.65,-5	1.29,-5	1.60,-7	2.74,-6	6.38,-5	5.17,-5
2π	2.76,-2	5.94,-3	5.70,-7	2.84,-6	4.91,-3	7.90,-3
25π	3.17,-1	<u>9.51,-1</u>	5.64,+1	4.75,+2	2.02,-2	1.47,-1
50π	1.65,-1	9.40,-1	1.25,+2	<u>1.07,+3</u>	7.80,-2	<u>1.54,-1</u>
10^{-4}	7004		2646		1606	
1.0	2.22,-8	2.08,-8	2.68,-7	7.28,-8	1.49,-7	1.58,-7
π	2.74,-6	6.90,-6	9.70,-8	1.71,-6	1.11,-5	3.33,-6
2π	3.02,-6	1.41,-5	7.90,-7	1.25,-6	4.54,-5	1.58,-4
25π	3.94,-5	2.29,-3	<u>1.87,0</u>	3.71,-1	1.12,-3	3.32,-2
50π	4.59,-5	<u>9.89,-3</u>	9.59,-2	2.75,-1	1.02,-2	<u>1.34,-1</u>
10^{-6}	7031		1200		7555	
1.0	2.08,-7	3.58,-8	1.03,-6	4.98,-7	4.55,-7	2.97,-7
π	1.27,-6	5.10,-6	1.07,-6	7.07,-6	2.15,-6	6.55,-6
2π	3.07,-6	5.20,-6	1.77,-6	6.33,-7	2.40,-7	1.23,-5
25π	2.54,-5	1.45,-3	7.78,-6	1.54,-5	9.50,-7	5.95,-6
50π	3.98,-5	<u>5.84,-3</u>	3.96,-4	<u>1.46,-2</u>	3.65,-4	<u>1.27,-2</u>

Tabell 7.5.

Problem: T6

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	368				179	
0.5	5.37,-5	8.11,-5			2.07,-2	3.11,-2
1.0	8.38,-4	1.26,-3			2.20,-3	3.29,-3
2.0	5.60,-4	8.39,-4			3.62,-3	5.43,-3
4.0	7.61,-4	1.14,-3			1.22,-2	1.83,-2
2π	8.44,-4	<u>1.27,-3</u>			1.17,-2	1.76,-2
10^{-4}	463				364	
0.5	1.14,-5	1.75,-5			1.79,-5	2.71,-5
1.0	5.15,-6	8.87,-5			2.06,-5	2.83,-5
2.0	3.44,-4	<u>5.10,-4</u>			2.54,-5	2.15,-5
4.0	2.50,-4	3.74,-4			1.79,-4	<u>2.80,-4</u>
2π	4.81,-5	7.80,-5			1.71,-4	2.16,-4
10^{-6}	955				659	
0.5	2.92,-6	3.58,-6			1.02,-6	8.00,-8
1.0	5.26,-6	1.39,-5			2.86,-6	2.23,-5
2.0	7.48,-6	9.20,-6			5.91,-7	9.86,-5
4.0	8.92,-6	4.29,-6			5.38,-5	4.14,-5
2π	1.61,-6	<u>3.03,-5</u>			3.49,-5	<u>2.32,-4</u>

Tabell 7.6.

Problem: T7

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	331				114	
1.0	2.21,-5	1.60,-6			2.00,-5	5.52,-7
2.0	<u>6.30,-4</u>	<u>8.14,-5</u>			<u>6.28,-4</u>	<u>7.97,-5</u>
3.0	1.00,-4	1.11,-5			1.00,-4	1.07,-5
4.0	2.99,-5	1.32,-5			2.99,-5	1.31,-5
5.0	1.39,-4	3.47,-6			1.39,-4	3.43,-6
10^{-4}	635				154	
1.0	1.92,-6	5.78,-6			9.90,-7	6.64,-6
2.0	<u>2.12,-5</u>	<u>8.64,-6</u>			<u>2.18,-5</u>	<u>1.04,-5</u>
3.0	3.45,-6	7.04,-7			3.34,-6	1.21,-6
4.0	1.64,-6	6.08,-8			1.69,-6	1.08,-7
5.0	3.15,-6	1.23,-7			3.14,-6	1.80,-7
10^{-6}	818				233	
1.0	<u>1.58,-6</u>	8.90,-5			<u>7.17,-7</u>	9.00,-5
2.0	6.79,-7	<u>1.30,-4</u>			8.70,-8	<u>1.32,-4</u>
3.0	1.38,-7	3.16,-5			2.47,-7	3.25,-5
4.0	2.15,-7	7.82,-6			2.81,-7	8.17,-6
5.0	9.78,-8	2.66,-6			1.57,-7	2.78,-6

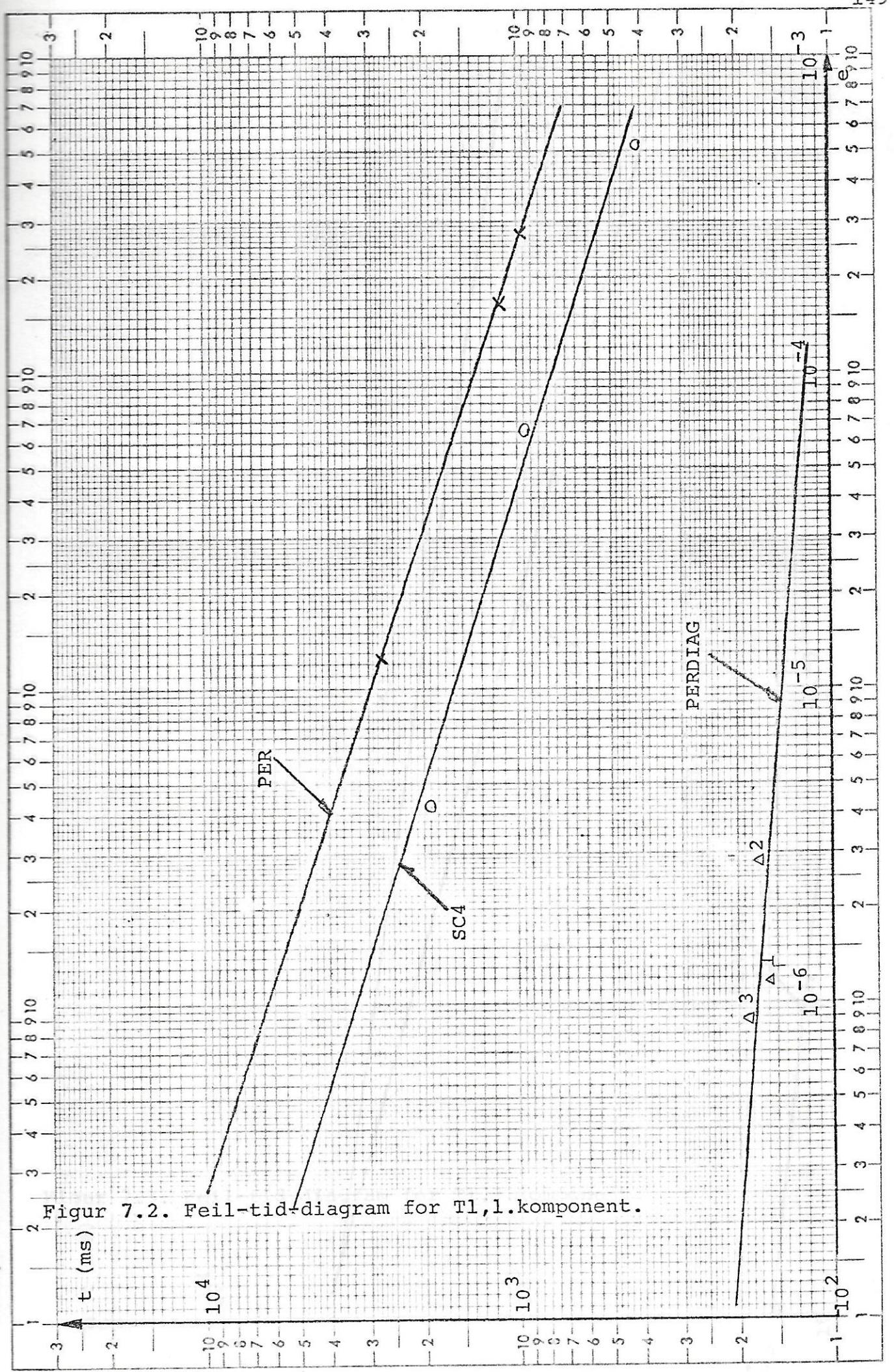
Tabell 7.7.

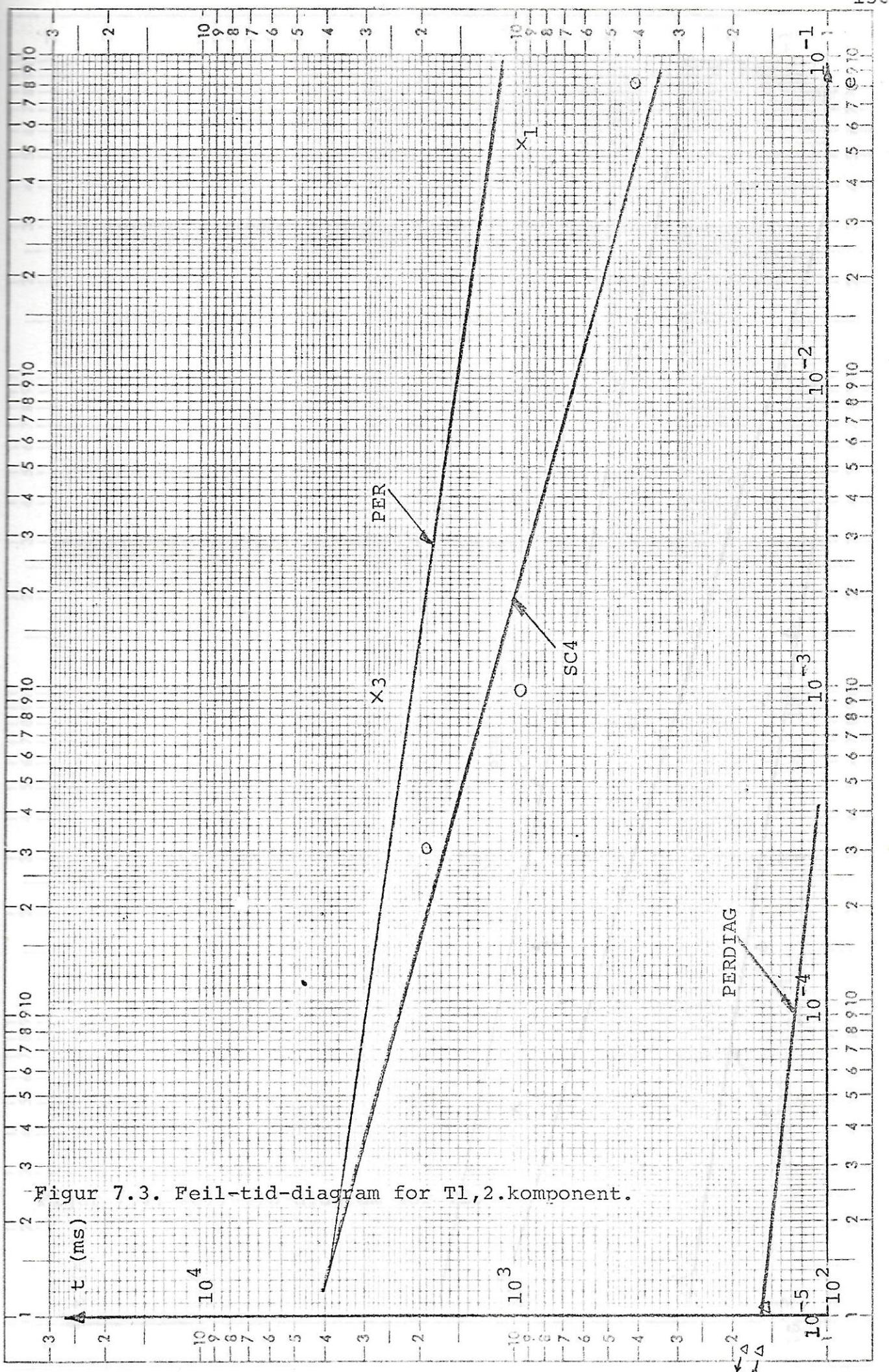
Problem: T8

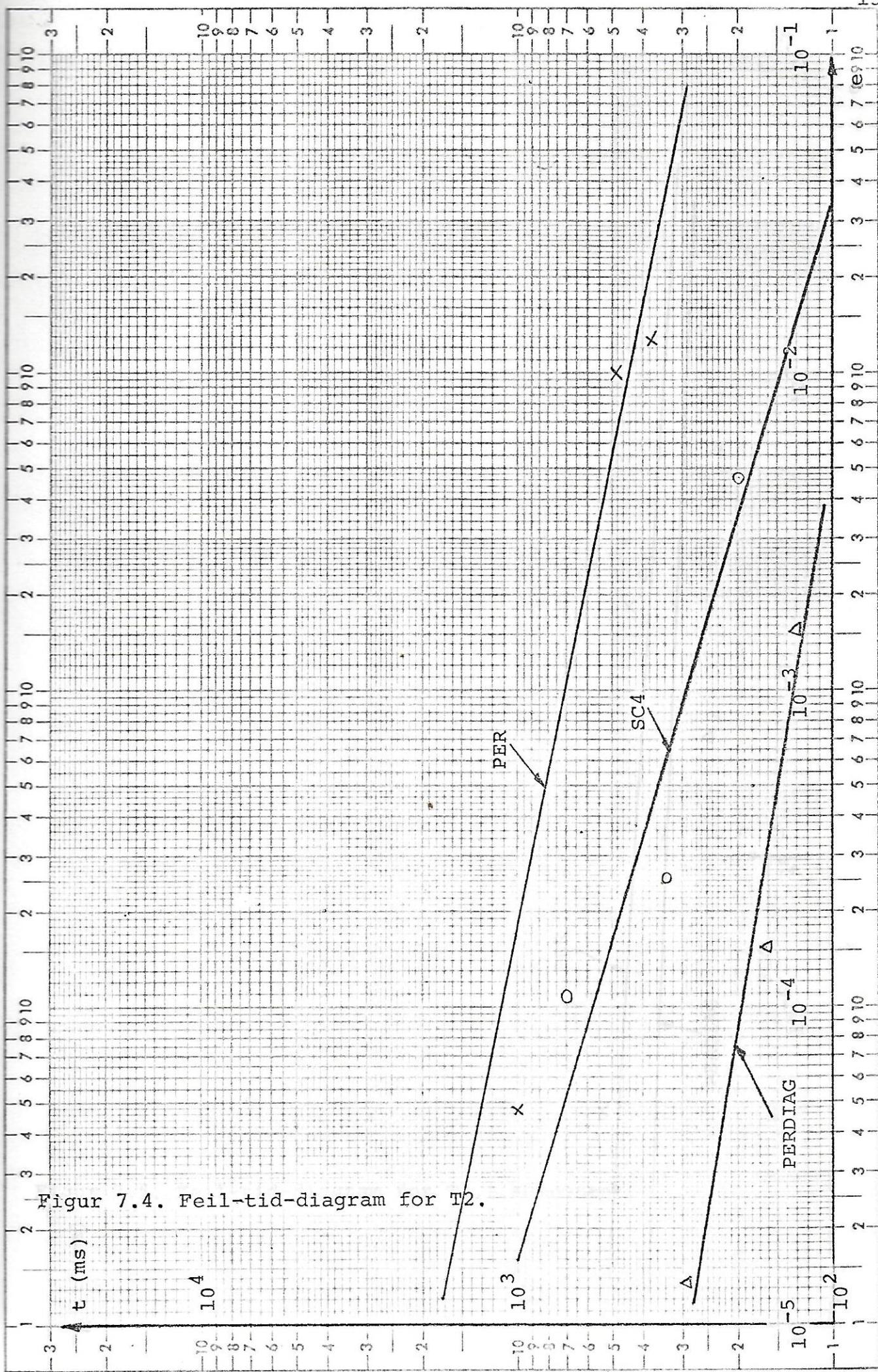
	PER	PERDIAG	SC4
10^{-2}	117		59
1.1	<u>4.59,-3</u>		<u>4.65,-3</u>
1.5	9.78,-6		1.04,-5
2.0	1.67,-6		1.97,-6
3.0	7.98,-6		3.40,-4
4.0	3.59,-4		7.44,-4
10^{-4}	132		86
1.1	<u>2.04,-5</u>		<u>2.05,-5</u>
1.5	9.09,-8		9.09,-8
2.0	7.05,-6		7.45,-7
3.0	2.55,-7		5.12,-6
4.0	3.52,-6		1.39,-5
10^{-6}	251		123
1.1	1.89,-8		1.89,-8
1.5	1.07,-7		5.06,-8
2.0	2.23,-7		6.85,-7
3.0	1.41,-7		4.41,-6
4.0	<u>8.95,-7</u>		<u>6.91,-6</u>

Tabell 7.8.

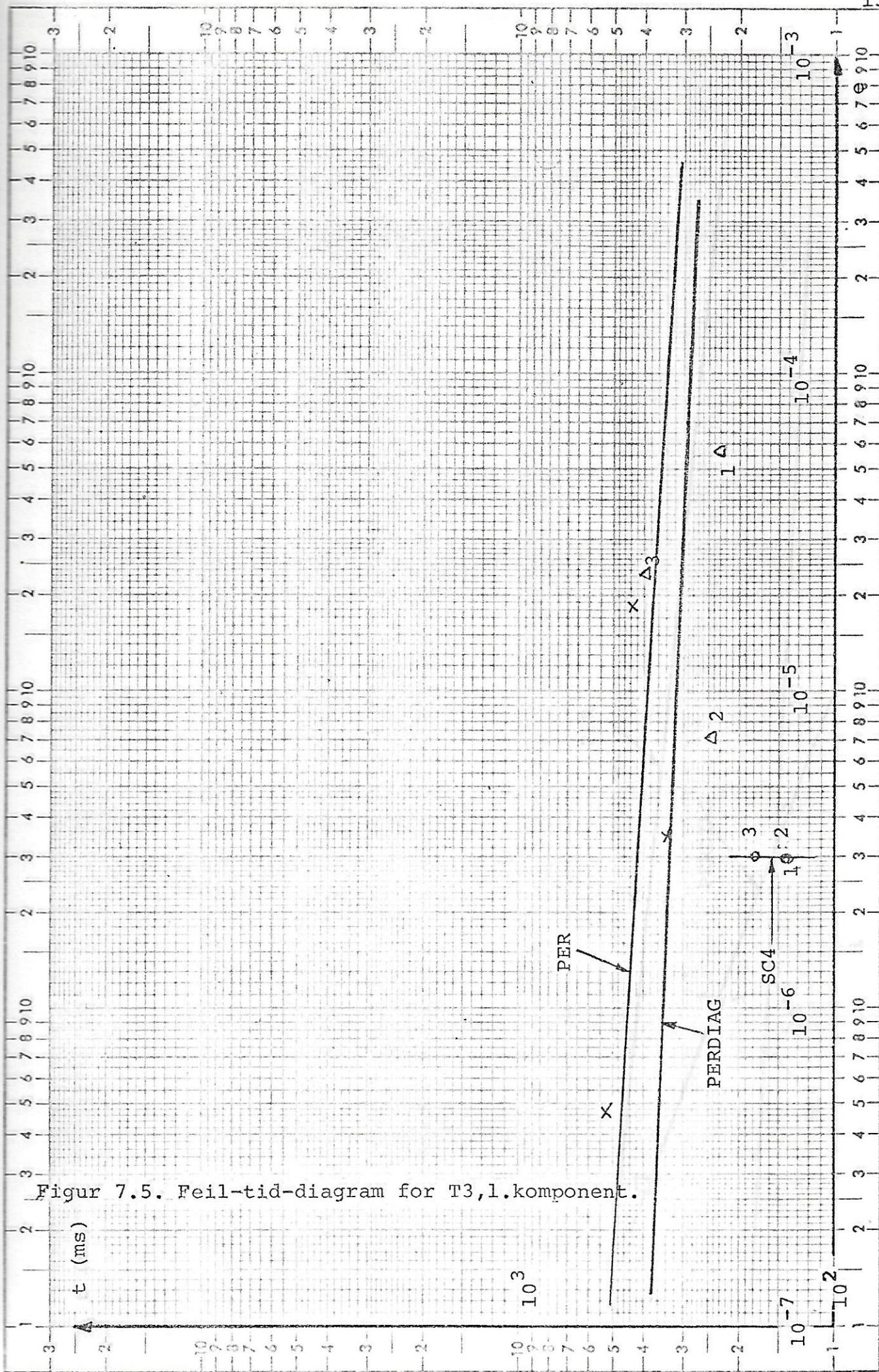
Figur 7.2. Fall-tid-diagram for $\pi_1, 1$. komponent.



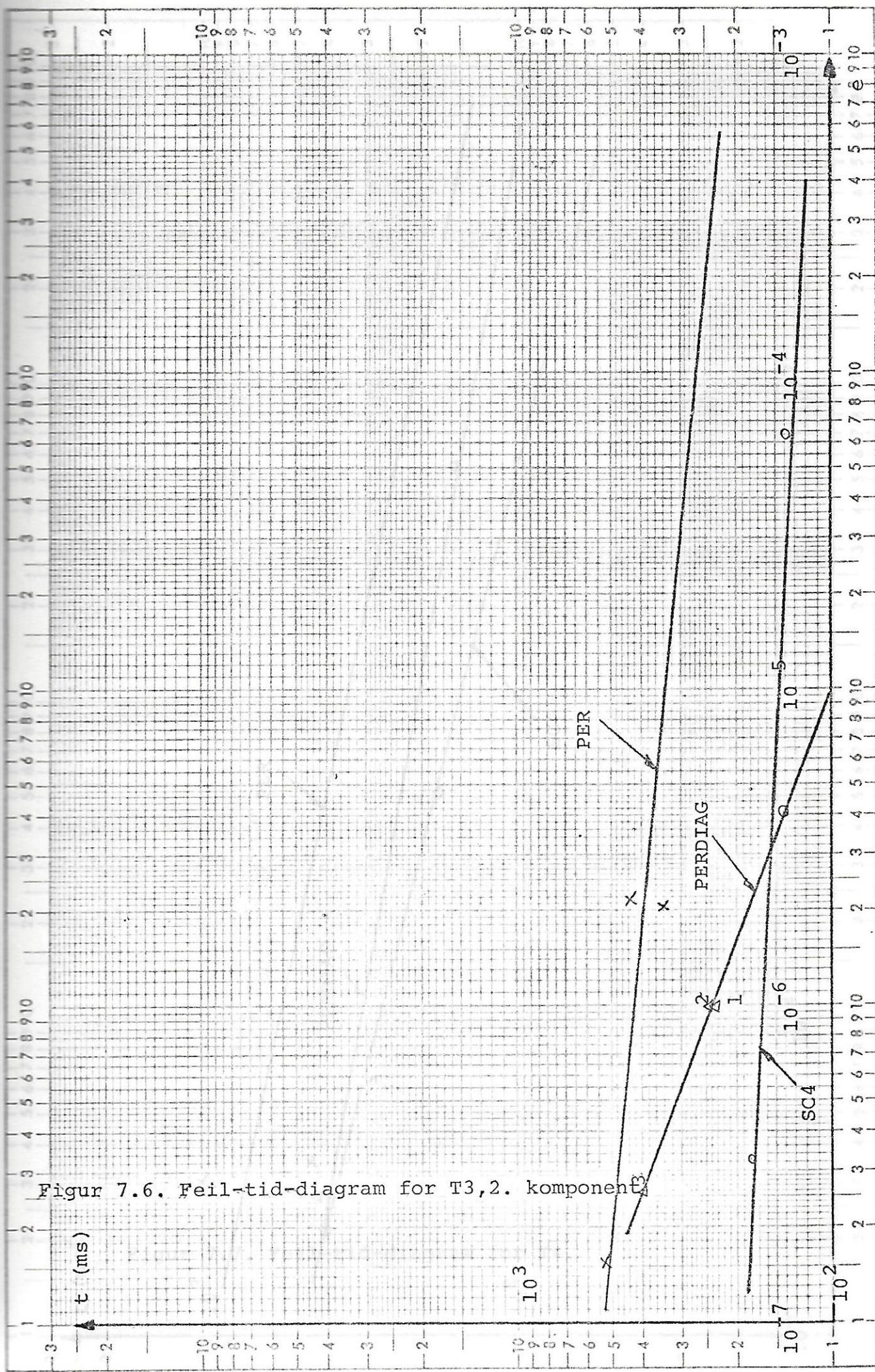




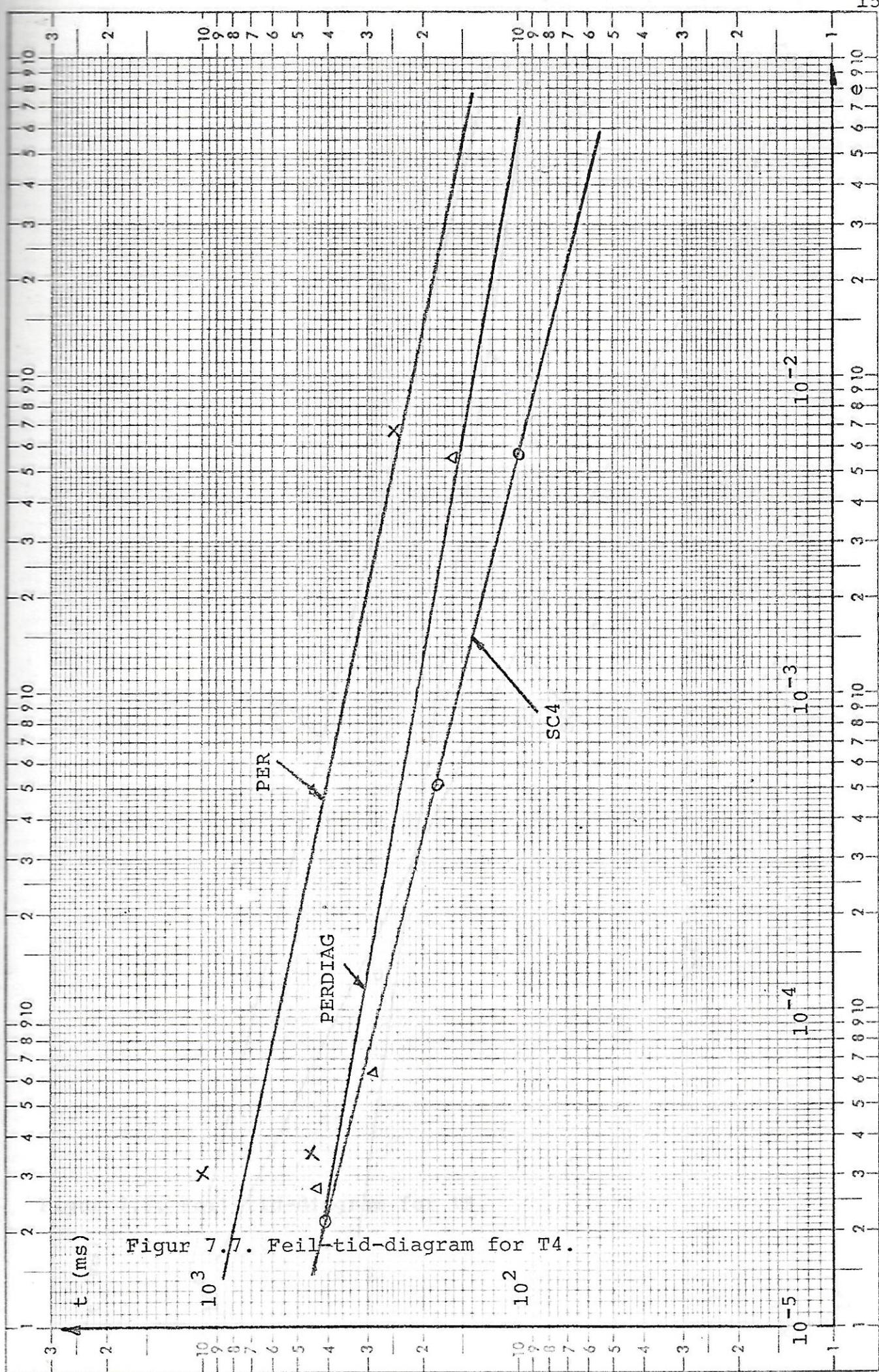
Figur 7.4. Feil-tid-diagram for T_2 .



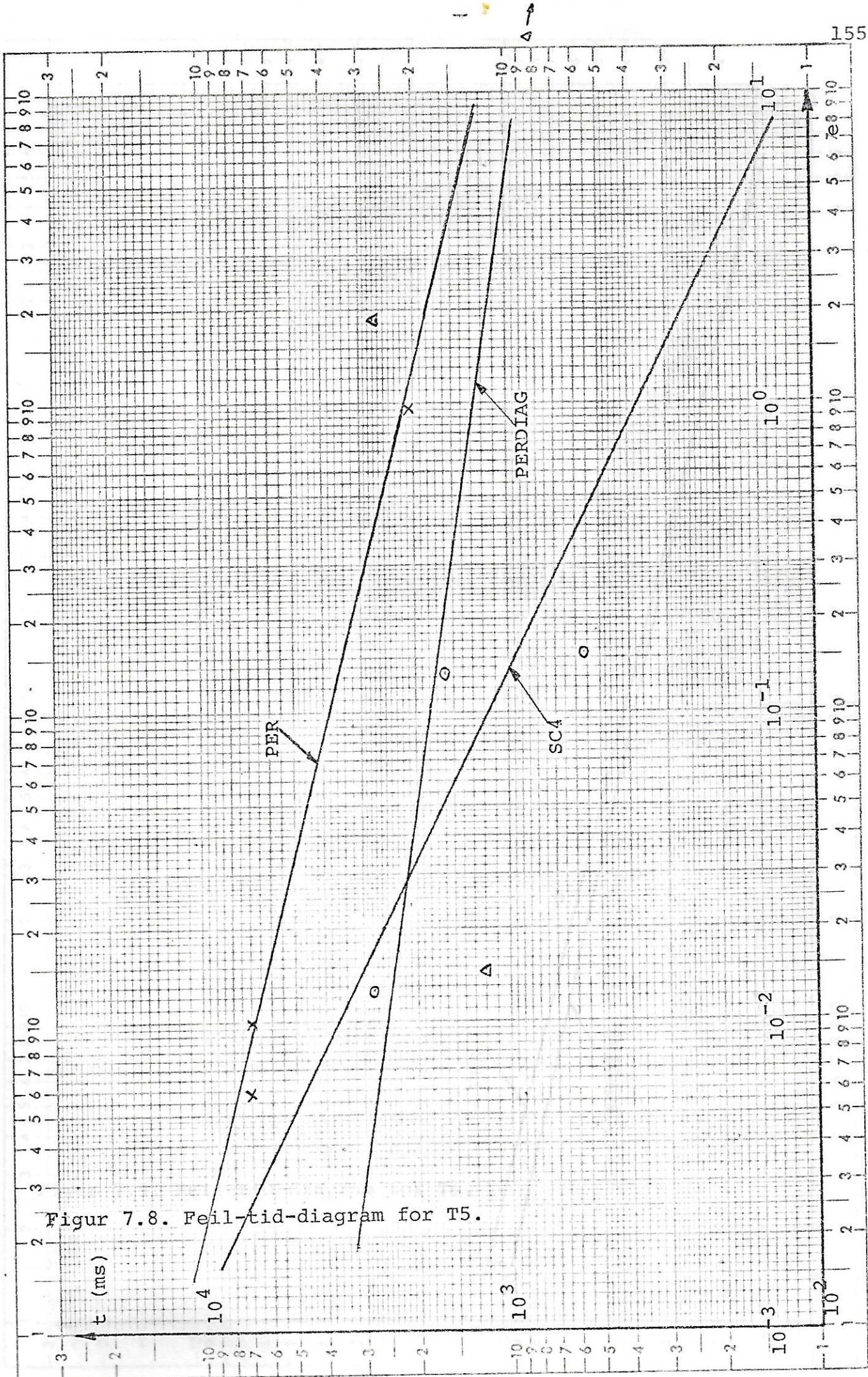
Figur 7.5. Feil-tid-diagram for T3,1.komponent.



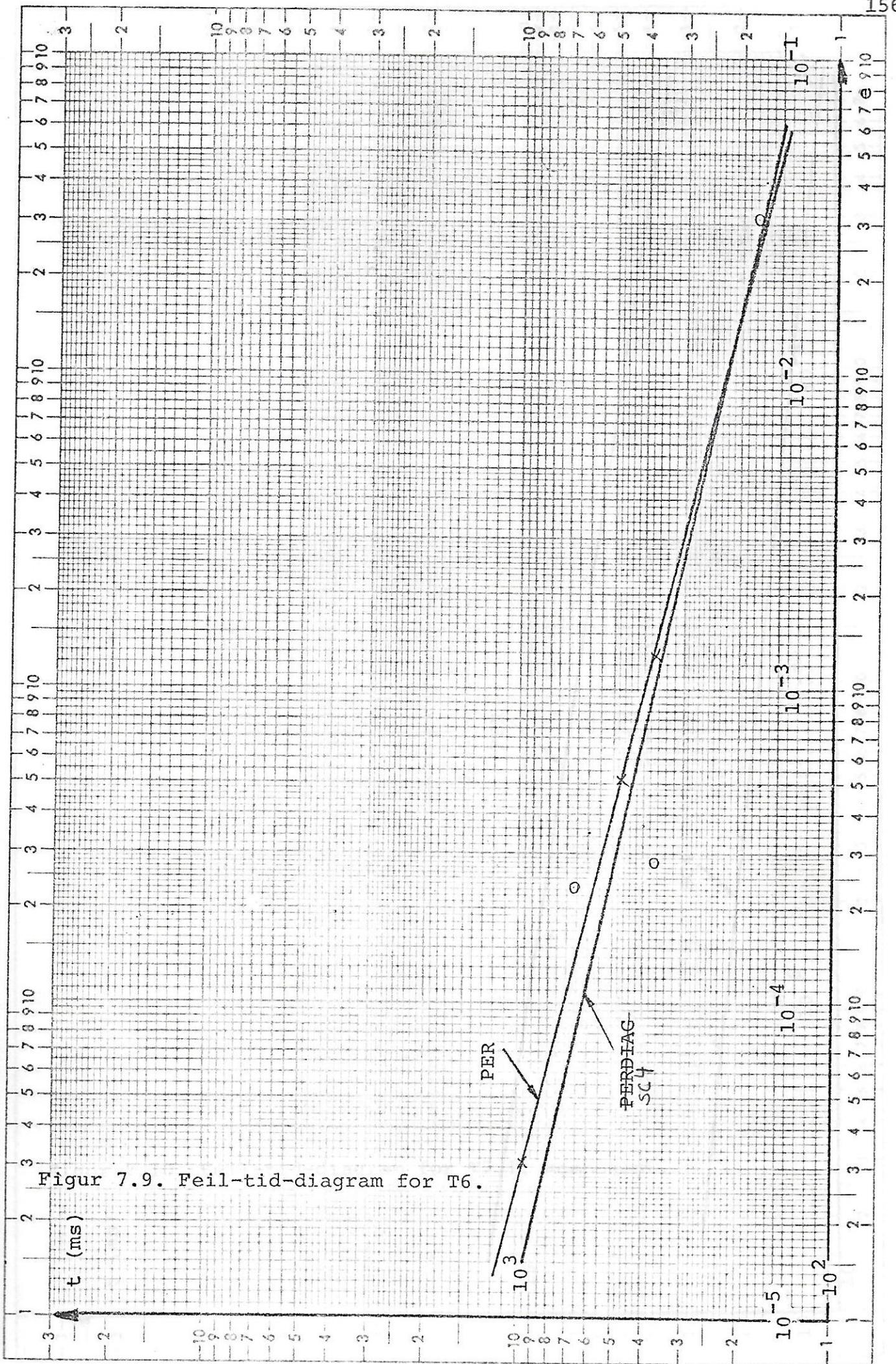
Figur 7.6. Feil-tid-diagram for T3,2. komponent



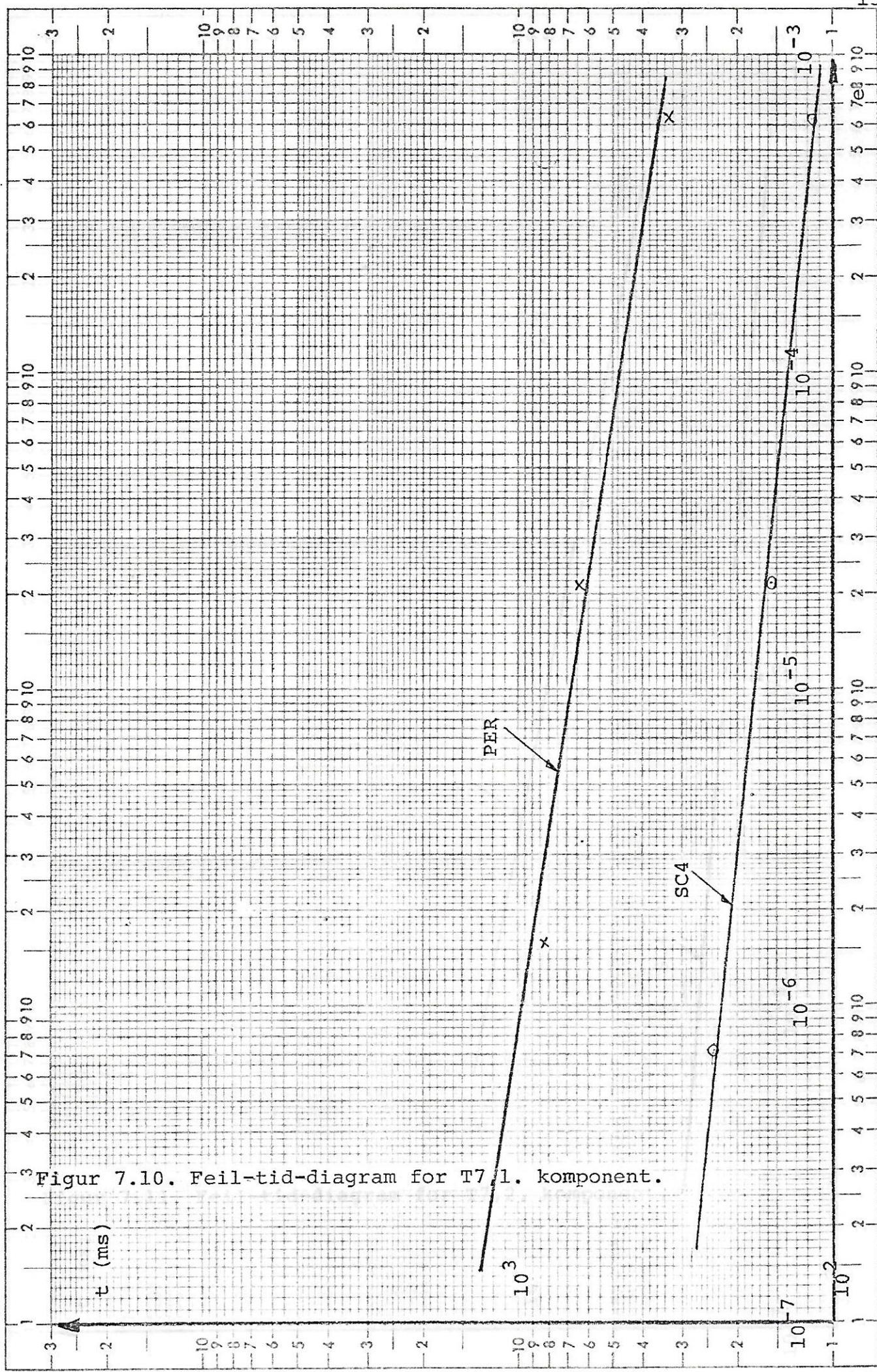
Figur 7.7. Feil-tid-diagram for T4.



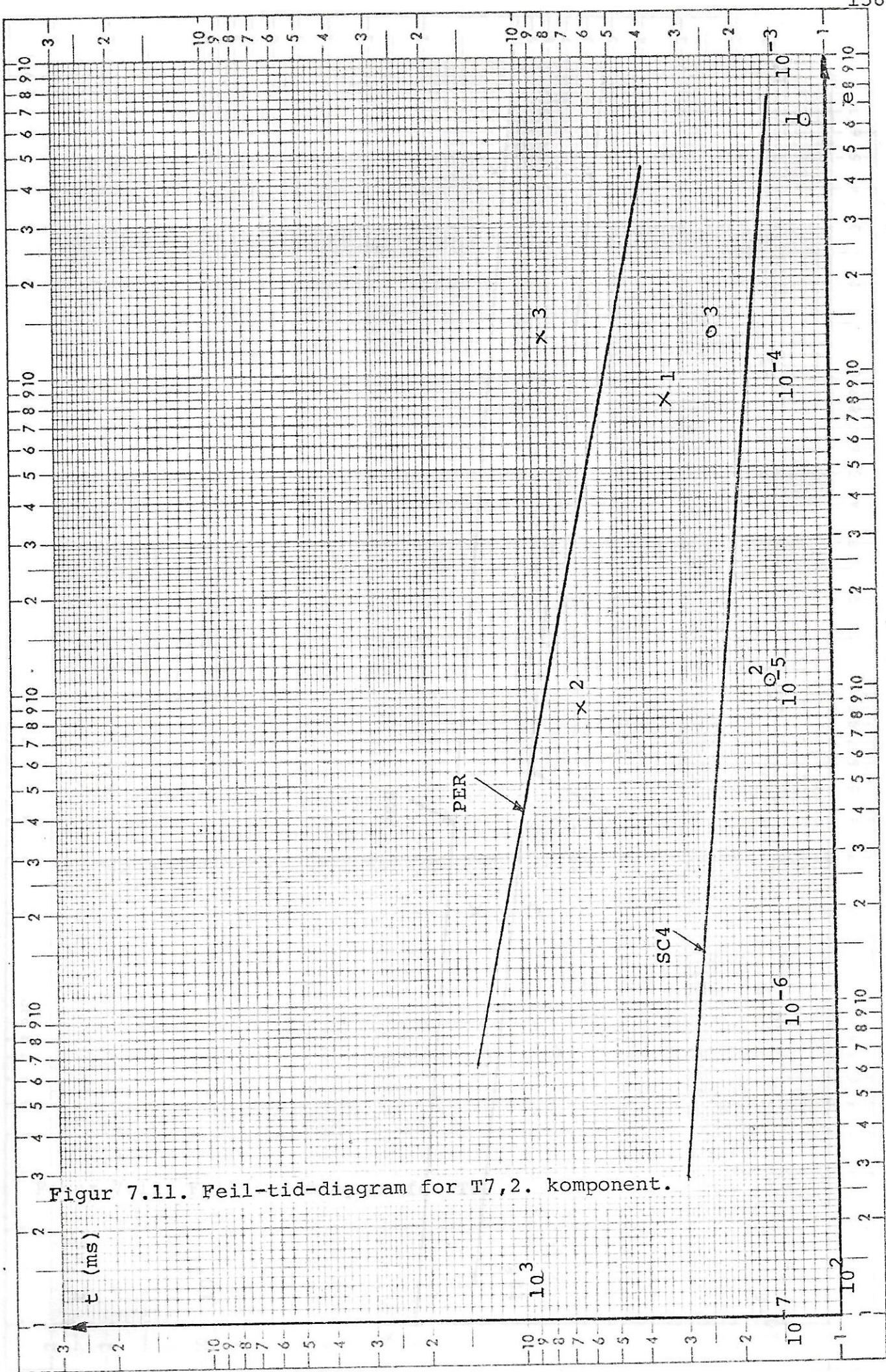
Figur 7.8. Feil-tid-diagram for T5.



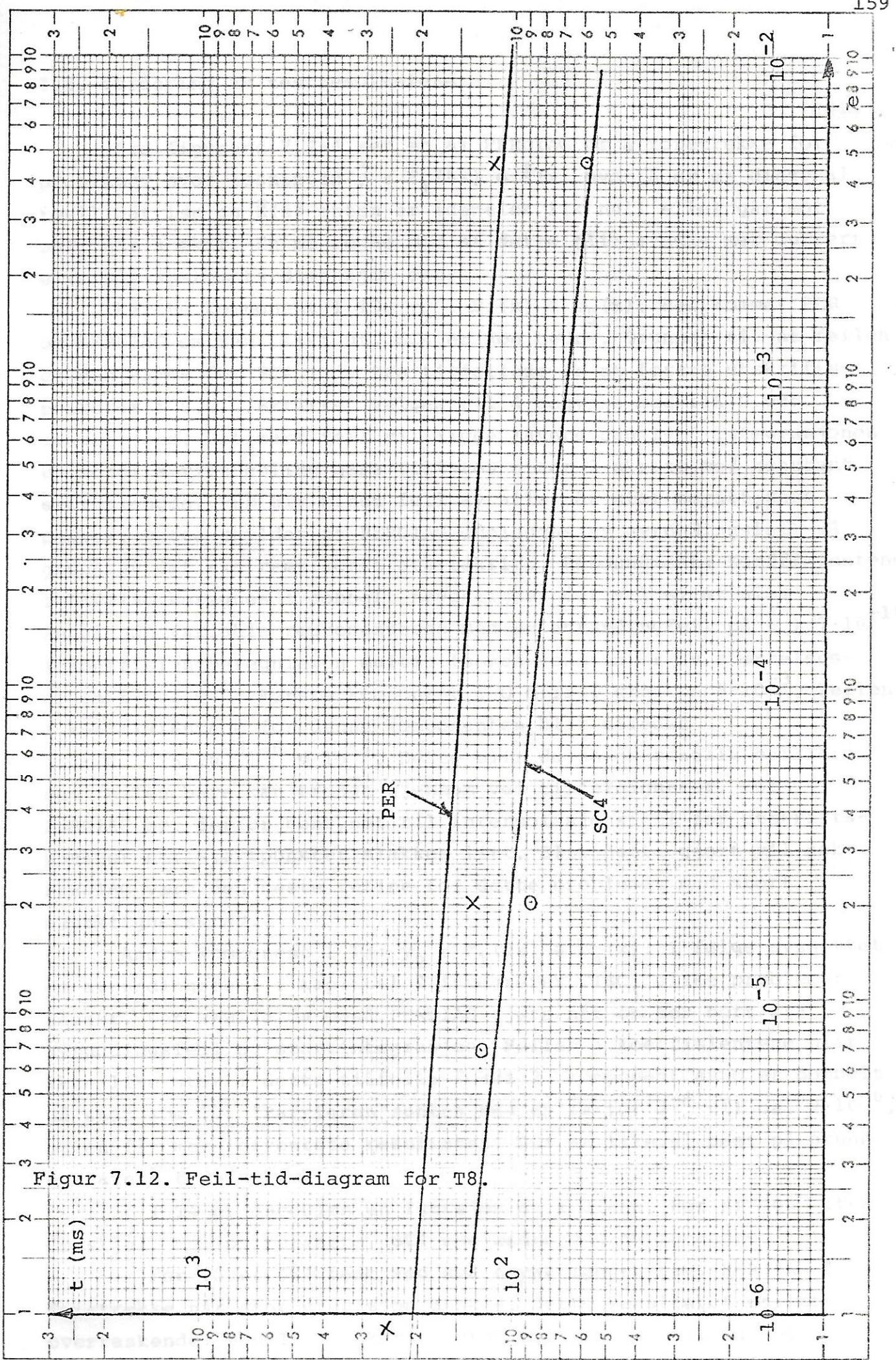
Figur 7.9. Feil-tid-diagram for T6.



Figur 7.10. Feil-tid-diagram for T7/1. komponent.



Figur 7.11. Feil-tid-diagram for T7,2. komponent.



Figur 7.12. Feil-tid-diagram for T8.

7.3. Vurdering av testresultatene.

Fra figurene 7.2-4 ser en at PERDIAG er å foretrekke for problemer hvor løsningen $\vec{y} \in \vec{F}_1(\vec{A}\vec{x}) \oplus \vec{K}(\vec{x})$ hvor A er en diagonal reell matrise og $\vec{K}(\vec{x})$ enten er identisk lik null eller går mot null når \vec{x} øker. En må regne med at dette blir stadig mer uttrert ettersom systemets dimensjon øker.

Første komponent i T3: $y_1 \in F_1(x) \oplus p_5(x)$. Her kommer PER og PERDIAG omtrent likt ut. SC4 er noe bedre. Grunnen til at feilen er den samme for SC4 i de tre tilfellene er at første utskriftspunkt er i 0.01. Skrittet velges til å begynne med lik 0.005 uansett eps. Estimert feil vil ligge lavere enn 10^{-6} integrasjonen ut fordi skriddobling bare tillates etter 3 skritt med konstant skrittlengde. PER gir minst feil av alle når stor nøyaktighet ønskes. Dette skyldes at PERDIAG ødelegges av avrundingsfeil på grunn av det ekstremt korte startskritt. Resonnement: Koeffisientene i PERDIAG beregnes i dobbelt nøyaktighet det vil si at alle inngående variable representeres med en avrundingfeil på $\approx 1.7 \cdot 10^{-18}$. I koeffisientberegningen multipliseres konstanter av størrelsesorden 1 med Q^{-6} . Første komponent i Q blir i starten $5 \cdot 10^{-3}$. Feilen i koeffisientene for denne komponenten blir således $1.7 \cdot 10^{-18} (5 \cdot 10^{-3})^{-6} \approx 10^{-4}$. Dette blir da en omtrentlig barriere som feilen bare kan trenge gjennom ved tilfeldigheter. For PERDIAG bør derfor hensynet til interpolasjonsfeil for utskriftspunkter nær startpunktet slakkes litt. Blir dette gjort vil nok PERDIAG være den beste rutine for dette problemet med stort nøyaktighetskrav.

Andre komponent i T3: $y_2 \in F_1(2x) \oplus p_4(x)$. I følge avsnittet om avrundingsfeil i kapittel 2 integrerer TTSC₄ slike problemer eksakt. Det skulle da også PERDIAG gjøre når en ser bort fra avrundingsfeil og startintegrasjon. Feilen i koeffisientene blir ikke like stor i dette tilfelle fordi 2. komponent av Q er dobbelt så stor som 1.. "Barrieren" senkes med en faktor 2^{-6} til ca. $2 \cdot 10^{-6}$, og en får mer forventete resultater. SC4 er likevel best på grunn av lavere tidsforbruk.

I T4 er Jacobien en funksjon av x alene. Her er det liten forskjell mellom rutinene, SC4 noe bedre enn de to andre.

For T5 er SC4 best ved små nøyaktighetskrav, PERDIAG å foretrekke når stor presisjon ønskes. Dette resultatet er litt overraskende. PERDIAG bruker en grov tilnærmelse til Jacobi-

matrisen ved tilpasningen. Ved store skritt skjener den helt ut. Etterhvert som skrittene blir mindre konkurrerer den stadig bedre for å bli den mest effektive rutine til slutt.

T6 skulle en forvente ville favorisere PER foran SC4. Riktignok fås mest nøyaktige resultater med PER, men tilpasningen ser ut til å være så arbeidskrevende at effektiviteten ikke blir større enn for SC4.

I T7 kan en naturligvis ikke vente at PER skal konkurrere med SC4 fordi PER i dette tilfelle reduseres til matematisk sett samme metode som SC4 og består følgelig for en stor del av dummy-operasjoner. Andre komponent av løsningen: $y_2 \in p_6(x)$ og skal ifølge avsnittet om trunkeringsfeil integreres eksakt uten tilpasning. Dette indikeres av de numeriske løsninger idet minste feil oppnås med $\text{eps} = 10^{-4}$.

For T8 som er et ikke-lineært problem (som T5) er SC4 noe mer effektiv enn PER, men gir ikke like nøyaktig løsning ved store nøyaktighetskrav.

Det er ikke mulig å finne spredlet for ekspansjon med finansielt tilstrekkelig dypekoeffisienter.

Hør allmennheten, kubeflikken bør ikke overvære nærliggende sifre med fornuftig oppmerksomhet. Nøyaktigheten må ikke være et mål for alle tilpasningsmetoder fra i vissa punkter gitt ved en naturlig del. Det er også tydelig at en trigonometrisk tilpasning av formen $\sum a_i \sin(i\omega t)$ med andre ord kan få bedre konvergens enn Birkhoff-Cowell-type sin trigonometrisk løsning. Det er imidlertid ikke mulig å beregne a_i ved hjelpe av en vanlig matrisemultiplikasjon med matriser som har stor spredning i størrelsen.

8. KONKLUSJON.

Når systemer av typen $\ddot{\vec{y}} = \vec{f}(x, \vec{y})$ skal løses ved hjelp av en prediktor-korrektormetode, vil generelt en slik metode basert på trigonometrisk tilpasning av Størmers og Cowells metoder av orden 5 ikke være å foretrekke framfor de tilsvarende metoder uten tilpasning. For en underklasse av problemer med løsning $\vec{y} \in \vec{F}_1(Ax) + \vec{K}(x)$ hvor A er en konstant reell diagonalmatrise og $\vec{K}(x)$ er identisk lik nullvektoren eller en vektorfunksjon som går mot nullvektoren når x øker, synes en trigonometrisk tilpasning å gi en mer effektiv løsningsmetode enn ingen tilpasning.

Det synes videre som om den globale feil kan komme lenger ned mot datamaskinenes avrundingsfeil med tilpasning enn uten for en noe større klasse. Da må til gjengjeld et stort tidsforbruk tåles.

For visse komplete systemer kan en diagonal trigonometrisk tilpasning være mest effektivt når stor nøyaktighet kreves. Dette gjelder etter alt å dømme spesielt for problemer med diagonal-dominant Jacobimatrice.

For Størmers metode, $k=0$ blir banestabilt område større med tilpasning enn uten. Banestabiliteten beholdes for alle tilpasninger bortsett fra i visse punkter $q=n \cdot 2\pi$, n naturlig tall. Dette kan tyde på at en trigonometrisk tilpasning av Størmers metode, $k=0$ og de andre banestabile metodene av Størmer-Cowell-type gir større effektivitet ved anvendelse på problemer av typen $\ddot{\vec{y}} = -D^2 \vec{y}$, hvor D er en reell diagonalmatrise med egenverdier som har stor spredning i størrelsesorden.

9. REFERANSE

- [1] Henrici, Peter : Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., og med New York, 1962.
- er variert til å ligge innenfor de ulike områder med absolutt stabilitet eller ustabilitet som framgår av figurene 4.4, 4.6 og 4.9. "Startintegrasjonen" er den kjente eksakt løsning. Det er også tatt med en utskrift av et program som viser hvordan integrasjonen er foretatt for Störkers metode.

Integrasjon med Størmers metode, k=5.

Vedlegg 1.

De etterfølgende utskrifter viser integrasjon av $y'' = -\lambda^2 y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, med Størmers metode, $k=4$ og $k=5$ og med Cowells metode, $k=6$. Det er brukt skritt $h=1$, og $z^2 = \lambda^2 h^2 = \lambda^2$ er variert til å ligge innenfor de ulike områder med absolutt stabilitet eller ustabilitet som framgår av figurene 4.4, 4.6 og 4.9. "Startintegrasjonen" er den kjente eksakte løsning. Det er også tatt med en utskrift av et program som viser hvordan integrasjonen er foretatt for Størmers metode, $k=5$.

```

15      SIN3:=51913*Z1;
16      SIN4:=51714*Z1;
17      SIN5:=51715*Z1;
18      UN1:=S1*Y1;
19      UN1:=UN1+;
20      UN1:=51715*(Y1-Z1);
21      UN1:=51715*(Y1-Z1)+;
22      UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+;
23      UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+;
24      UN1:=51715*(Y1-Z1);
25      COMPUTE INTEGRATION;
26      FOR N1:=0 TO 100000 DO
27      BEGIN
28          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1);
29          UN1:=UN1+;
30          UN1:=51715*(Y1-Z1);
31          UN1:=51715*(Y1-Z1)+;
32          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1);
33          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+;
34          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1);
35          UN1:=UN1+;
36          UN1:=51715*(Y1-Z1);
37          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+;
38          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1);
39          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+;
40          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1);
41          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+;
42          UN1:=51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1)+51715*(Y1-Z1);
43      END;
44      ENDPROCEDURE FOR;

```

Integrasjon med Størmers metode, k=5.

ET*DIP.55

```

1 PROCEDURE S5(Z2);
2   VALUE Z2;
3   REAL Z2;
4   BEGIN
5     REAL UNP1,UN,UNM1,D2UN,D3UN,D4UN,D5UN;
6     REAL Z;
7     REAL UNG,UNM1G,D2UNG,D3UNG,D4UNG,D5UNG;
8     REAL SIN5,STN4,SIN3,SIN2,SIN1,SIN0;
9     INTEGER N;
10    COMMENT INITIALISERING;
11    Z:=SQRT(Z2);
12    SIN0:=0.0;
13    SIN1:=SIN(Z);
14    SIN2:=SIN(2*Z);
15    SIN3:=SIN(3*Z);
16    SIN4:=SIN(4*Z);
17    SIN5:=SIN(5*Z);
18    UN:=SIN4;
19    UNM1:=SIN3;
20    D2UN:=SIN5-2*SIN4+STN3;
21    D3UN:=SIN5-3*SIN4+3*SIN3-SIN2;
22    D4UN:=SIN5-4*SIN4+6*SIN3-4*SIN2+STN1;
23    D5UN:=SIN5-5*SIN4+10*SIN3-10*SIN2+5*SIN1-SIN0;
24    WRITE('Z2=',Z2);
25    COMMENT INTEGRASJON;
26    FOR N:=(6,1,1000) DO
27      BEGIN
28        UNP1:=2*UN-UNM1-72*(UN+1/12*D2UN+1/12*D3UN+19/240*D4UN+3/40*D5UN);
29        UNG:=UN;
30        UNM1G:=UNM1;
31        D2UNG:=D2UN;
32        D3UNG:=D3UN;
33        D4UNG:=D4UN;
34        D5UNG:=D5UN;
35        UN:=UNP1;
36        UNM1:=UNG;
37        D2UN:=UNP1-2*UNG+UNM1G;
38        D3UN:=D2UN-D2UNG;
39        D4UN:=D3UN-D3UNG;
40        D5UN:=D4UN-D4UNG;
41        IF N GTR 980 THEN WRITE('N=',N,' UN=',UN);
42      END;
43    END PROCEDURE S5;

```

#PRT 2.45

Størmers metode , k=4 , $z^2 = 1.21$

WXQT DIP.A

BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27, 1975

ME	901	UNE	3.2898,-04
ME	902	UNE	1.2586,-01
ME	903	UNE	1.2428,-01
ME	904	UNE	-2.2736,-03
ME	905	UNE	-1.2599,-01
ME	906	UNE	-1.2247,-01
ME	907	UNE	4.1924,-03
ME	908	UNE	1.2608,-01
ME	909	UNE	1.2065,-01
ME	910	UNE	-6.0853,-03
ME	911	UNE	-1.2615,-01
ME	912	UNE	-1.1883,-01
ME	913	UNE	7.9521,-03
ME	914	UNE	1.2619,-01
ME	915	UNE	1.1701,-01
ME	916	UNE	-9.7929,-03
ME	917	UNE	-1.2620,-01
ME	918	UNE	-1.1519,-01
ME	919	UNE	1.1607,-02
ME	920	UNE	1.2618,-01
ME	921	UNE	1.1336,-01
ME	922	UNE	-1.3396,-02
ME	923	UNE	-1.2613,-01
ME	924	UNE	-1.1154,-01
ME	925	UNE	1.5158,-02
ME	926	UNE	1.2605,-01
ME	927	UNE	1.0971,-01
ME	928	UNE	-1.6894,-02
ME	929	UNE	-1.2595,-01
ME	930	UNE	-1.0788,-01
ME	931	UNE	1.8603,-02
ME	932	UNE	1.2582,-01
ME	933	UNE	1.0605,-01
ME	934	UNE	-2.0286,-02
ME	935	UNE	-1.2567,-01
ME	936	UNE	-1.0422,-01
ME	937	UNE	2.1942,-02
ME	938	UNE	1.2549,-01
ME	939	UNE	1.0239,-01
ME	940	UNE	-2.3572,-02
ME	941	UNE	-1.2528,-01
ME	942	UNE	-1.0056,-01
ME	943	UNE	2.5176,-02
ME	944	UNE	1.2505,-01
ME	945	UNE	9.8734,-02
ME	946	UNE	-2.6753,-02
ME	947	UNE	-1.2479,-01
ME	948	UNE	-9.6909,-02
ME	949	UNE	2.8303,-02
ME	950	UNE	1.2451,-01
ME	951	UNE	9.5086,-02
ME	952	UNE	-2.9827,-02
ME	953	UNE	-1.2420,-01
ME	954	UNE	-9.3265,-02
ME	955	UNE	3.1325,-02
ME	956	UNE	1.2387,-01
ME	957	UNE	9.1447,-02
ME	958	UNE	-3.2796,-02
ME	959	UNE	-1.2352,-01
ME	960	UNE	-8.9633,-02

961 UN= 3.4240,-02
 962 UN= 1.2314,-01
 963 UN= 8.7821,-02
 964 UN= -3.5658,-02
 965 UN= -1.2274,-01
 966 UN= -8.6014,-02
 967 UN= 3.7049,-02
 968 UN= 1.2232,-01
 969 UN= 8.4211,-02
 970 UN= -3.8414,-02
 971 UN= -1.2187,-01
 972 UN= -8.2413,-02
 973 UN= 3.9753,-02
 974 UN= 1.2141,-01
 975 UN= 8.0619,-02
 976 UN= -4.1065,-02
 977 UN= -1.2092,-01
 978 UN= -7.8831,-02
 979 UN= 4.2351,-02
 980 UN= 1.2042,-01
 981 UN= 7.7049,-02
 982 UN= -4.3611,-02
 983 UN= -1.1989,-01
 984 UN= -7.5272,-02
 985 UN= 4.4845,-02
 986 UN= 1.1934,-01
 987 UN= 7.3502,-02
 988 UN= -4.6052,-02
 989 UN= -1.1877,-01
 990 UN= -7.1739,-02
 991 UN= 4.7234,-02
 992 UN= 1.1819,-01
 993 UN= 6.9982,-02
 994 UN= -4.8389,-02
 995 UN= -1.1758,-01
 996 UN= -6.8232,-02
 997 UN= 4.9519,-02
 998 UN= 1.1696,-01
 999 UN= 6.6490,-02
 1000 UN= -5.0623,-02

EXECUTION TIME 0.211 SECONDS

FIN

943 UN= -1.2314,-01
 944 UN= 7.7821,-02
 945 UN= 1.4367,-01
 946 UN= 1.2634,-01
 947 UN= 3.5171,-01
 948 UN= -7.7247,-01
 949 UN= 1.4818,-01
 950 UN= -1.2559,-01
 951 UN= -3.1811,-01
 952 UN= 4.1231,-01
 953 UN= 1.4654,-01
 954 UN= 1.2986,-01
 955 UN= 2.7047,-01
 956 UN= -8.2591,-01
 957 UN= -1.4406,-01
 958 UN= -1.2410,-01
 959 UN= 2.7457,-01
 960 UN=

WXT DIP.AK4

BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0: JANUARY 27, 1975

901	UN=	-1.1129,+01
902	UN=	-1.2523,+01
903	UN=	-6.4547,+00
904	UN=	3.4981,+00
905	UN=	1.1421,+01
906	UN=	1.2577,+01
907	UN=	6.2371,+00
908	UN=	-3.8587,+00
909	UN=	-1.1710,+01
910	UN=	-1.2622,+01
911	UN=	-6.0096,+00
912	UN=	4.2246,+00
913	UN=	1.1997,+01
914	UN=	1.2658,+01
915	UN=	5.7722,+00
916	UN=	-4.5956,+00
917	UN=	-1.2281,+01
918	UN=	-1.2685,+01
919	UN=	-5.5249,+00
920	UN=	4.9715,+00
921	UN=	1.2562,+01
922	UN=	1.2703,+01
923	UN=	5.2675,+00
924	UN=	-5.3522,+00
925	UN=	-1.2840,+01
926	UN=	-1.2711,+01
927	UN=	-5.0002,+00
928	UN=	5.7374,+00
929	UN=	1.3114,+01
930	UN=	1.2710,+01
931	UN=	4.7228,+00
932	UN=	-6.1270,+00
933	UN=	-1.3384,+01
934	UN=	-1.2699,+01
935	UN=	-4.4354,+00
936	UN=	6.5207,+00
937	UN=	1.3650,+01
938	UN=	1.2677,+01
939	UN=	4.1379,+00
940	UN=	-6.9184,+00
941	UN=	-1.3911,+01
942	UN=	-1.2646,+01
943	UN=	-3.8303,+00
944	UN=	7.3198,+00
945	UN=	1.4167,+01
946	UN=	1.2603,+01
947	UN=	3.5127,+00
948	UN=	-7.7247,+00
949	UN=	-1.4418,+01
950	UN=	-1.2550,+01
951	UN=	-3.1851,+00
952	UN=	8.1329,+00
953	UN=	1.4664,+01
954	UN=	1.2486,+01
955	UN=	2.8475,+00
956	UN=	-8.5441,+00
957	UN=	-1.4904,+01
958	UN=	-1.2410,+01
959	UN=	-2.4999,+00
960	UN=	8.9580,+00

961	UN=	1.5138,+01
962	UN=	1.2323,+01
963	UN=	2.1424,+00
964	UN=	-9.3745,+00
965	UN=	-1.5365,+01
966	UN=	-1.2225,+01
967	UN=	-1.7750,+00
968	UN=	9.7932,+00
969	UN=	1.5586,+01
970	UN=	1.2115,+01
971	UN=	1.3978,+00
972	UN=	-1.0214,+01
973	UN=	-1.5799,+01
974	UN=	-1.1992,+01
975	UN=	-1.0108,+00
976	UN=	1.0636,+01
977	UN=	1.6005,+01
978	UN=	1.1858,+01
979	UN=	6.1419,-01
980	UN=	-1.1060,+01
981	UN=	-1.6203,+01
982	UN=	-1.1711,+01
983	UN=	-2.0799,-01
984	UN=	1.1485,+01
985	UN=	1.6394,+01
986	UN=	1.1552,+01
987	UN=	-2.0770,-01
988	UN=	-1.1910,+01
989	UN=	-1.6575,+01
990	UN=	-1.1380,+01
991	UN=	6.3276,-01
992	UN=	1.2336,+01
993	UN=	1.6748,+01
994	UN=	1.1195,+01
995	UN=	-1.0671,+00
996	UN=	-1.2763,+01
997	UN=	-1.6912,+01
998	UN=	-1.0997,+01
999	UN=	1.5105,+00
1000	UN=	1.3189,+01

EXECUTION TIME 0.222 SECONDS

FIN

WXT 2.A

BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27, 1975

Z2=	1.0000,-05	981	UN=	4.3962,-02
		982	UN=	4.0802,-02
		983	UN=	3.7642,-02
		984	UN=	3.4482,-02
		985	UN=	3.1322,-02
		986	UN=	2.8161,-02
		987	UN=	2.5000,-02
		988	UN=	2.1838,-02
		989	UN=	1.8677,-02
		990	UN=	1.5515,-02
		991	UN=	1.2353,-02
		992	UN=	9.1907,-03
		993	UN=	6.0285,-03
		994	UN=	2.8662,-03
		995	UN=	-2.9604,-04
		996	UN=	-3.4583,-03
		997	UN=	-6.6205,-03
		998	UN=	-9.7827,-03
		999	UN=	-1.2945,-02
		1000	UN=	-1.6107,-02
Z2=	1.0000,-03	981	UN=	-4.1300,-01
		982	UN=	-3.8399,-01
		983	UN=	-3.5461,-01
		984	UN=	-3.2487,-01
		985	UN=	-2.9480,-01
		986	UN=	-2.6444,-01
		987	UN=	-2.3382,-01
		988	UN=	-2.0296,-01
		989	UN=	-1.7190,-01
		990	UN=	-1.4067,-01
		991	UN=	-1.0929,-01
		992	UN=	-7.7810,-02
		993	UN=	-4.6249,-02
		994	UN=	-1.4642,-02
		995	UN=	1.6980,-02
		996	UN=	4.8584,-02
		997	UN=	8.0140,-02
		998	UN=	1.1162,-01
		999	UN=	1.4298,-01
		1000	UN=	1.7420,-01
Z2=	1.0000,-01	981	UN=	8.9966,-01
		982	UN=	7.1469,-01
		983	UN=	4.5883,-01
		984	UN=	1.5747,-01
		985	UN=	-1.5951,-01
		986	UN=	-4.6068,-01
		987	UN=	-7.1616,-01
		988	UN=	-9.0062,-01
		989	UN=	-9.0577,-01
		990	UN=	-9.0215,-01
		991	UN=	-8.0015,-01
		992	UN=	-6.0986,-01
		993	UN=	-4.4015,-01
		994	UN=	-1.3680,-01
		995	UN=	1.8013,-01
		996	UN=	4.7920,-01
		997	UN=	7.3075,-01

N=	998	UNE	9.0983,-01
N=	999	UNE	9.9867,-01
N=	1000	UNE	9.8848,-01
Z2=	1.5000,-01		
N=	981	UNE	5.3863,-01
N=	982	UNE	1.6620,-01
N=	983	UNE	-2.3088,-01
N=	984	UNE	-5.9378,-01
N=	985	UNE	-8.6873,-01
N=	986	UNE	-1.0150,+00
N=	987	UNE	-1.0109,+00
N=	988	UNE	-8.5696,-01
N=	989	UNE	-5.7608,-01
N=	990	UNE	-2.0984,-01
N=	991	UNE	1.8752,-01
N=	992	UNE	5.5713,-01
N=	993	UNE	8.4421,-01
N=	994	UNE	1.0062,+00
N=	995	UNE	1.0192,+00
Z=	996	UNE	8.8111,-01
N=	997	UNE	6.1249,-01
N=	998	UNE	2.5311,-01
N=	999	UNE	-1.4380,-01
N=	1000	UNE	-5.1943,-01
Z2=	5.0000,-01		
N=	981	UNE	1.4390,+01
N=	982	UNE	5.3849,+00
N=	983	UNE	-6.2641,+00
N=	984	UNE	-1.4966,+01
N=	985	UNE	-1.6515,+01
N=	986	UNE	-1.0125,+01
N=	987	UNE	1.1762,+00
N=	988	UNE	1.1977,+01
N=	989	UNE	1.7075,+01
N=	990	UNE	1.3985,+01
N=	991	UNE	4.1461,+00
N=	992	UNE	-7.7458,+00
N=	993	UNE	-1.5979,+01
N=	994	UNE	-1.6569,+01
N=	995	UNE	-9.1877,+00
N=	996	UNE	2.6584,+00
N=	997	UNE	1.3294,+01
N=	998	UNE	1.7593,+01
N=	999	UNE	1.3449,+01
N=	1000	UNE	2.8083,+00
Z2=	7.0000,-01		
N=	981	UNE	5.1160,+03
N=	982	UNE	3.8393,+03
N=	983	UNE	-7.3459,+00
N=	984	UNE	-3.9174,+03
N=	985	UNE	-5.2977,+03
N=	986	UNE	-3.1875,+03
N=	987	UNE	1.0750,+03
N=	988	UNE	4.6999,+03
N=	989	UNE	5.2708,+03
N=	990	UNE	2.3547,+03
N=	991	UNE	-2.1754,+03
N=	992	UNE	-5.3426,+03
N=	993	UNE	-5.0212,+03
N=	994	UNE	-1.3626,+03
N=	995	UNE	3.2650,+03
N=	996	UNE	5.8084,+03

Cowell's Method - 1968

22=	997	UNE	4.5431,+03
	998	UNE	2.4112,+02
	999	UNE	-4.2972,+03
	1000	UNE	-6.0649,+03
	7.1000,-01	UNE	
	981	UNE	5.5205,+03
	982	UNE	7.5429,+03
	983	UNE	4.5345,+03
	984	UNE	-1.5820,+03
	985	UNE	-6.7447,+03
	986	UNE	-7.4716,+03
	987	UNE	-3.1848,+03
	988	UNE	3.3195,+03
	989	UNE	7.7158,+03
	990	UNE	7.0023,+03
	991	UNE	1.5708,+03
	992	UNE	-5.0210,+03
	993	UNE	-8.3555,+03
	994	UNE	-6.1373,+03
	995	UNE	2.5218,+02
	996	UNE	6.5870,+03
	997	UNE	8.6138,+03
	998	UNE	4.8829,+03
	999	UNE	-2.1967,+03
	1000	UNE	-7.9342,+03
22=	4.0000,+00	UNE	-6.0649,+03
1FDF	010602	UNE	-1.0144,+03
	975	UNE	-8.9236,+03
	976	UNE	-3.4621,+03
	977	UNE	3.6993,+03
	978	UNE	9.0154,+03
	979	UNE	1.0105,+03
	980	UNE	5.5236,+03
	981	UNE	-1.7118,+03
	982	UNE	-8.7954,+03
	983	UNE	-1.0266,+03
	984	UNE	-6.8661,+03
	985	UNE	-3.3074,+03
	986	UNE	3.7652,+03
	987	UNE	5.1583,+03
	988	UNE	1.9138,+03
	989	UNE	6.9657,+03
	990	UNE	-5.5817,+03
	991	UNE	-6.9221,+03
	992	UNE	-3.0232,+03
	993	UNE	-8.7203,+03
	994	UNE	-1.1912,+03
	995	UNE	3.9823,+03
	996	UNE	8.1823,+03
	997	UNE	-2.8105,+03
	998	UNE	2.2747,+03
	999	UNE	-5.8591,+03
	1000	UNE	

EXECUTION TIME 0.195 Seconds

Cowells metode , k=6 , $z^2 = 0.49$

NET DIP.A

BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27, 1975

951	UN=	3.1535,-01
952	UN=	8.7528,-01
953	UN=	1.0237,+00
954	UN=	6.9069,-01
955	UN=	3.2911,-02
956	UN=	-6.4039,-01
957	UN=	-1.0126,+00
958	UN=	-9.0868,-01
959	UN=	-3.7746,-01
960	UN=	3.3129,-01
961	UN=	8.8431,-01
962	UN=	1.0215,+00
963	UN=	6.7841,-01
964	UN=	1.6249,-02
965	UN=	-6.5359,-01
966	UN=	-1.0161,+00
967	UN=	-9.0089,-01
968	UN=	-3.6200,-01
969	UN=	3.4715,-01
970	UN=	8.9311,-01
971	UN=	1.0191,+00
972	UN=	6.6594,-01
973	UN=	-4.2742,-04
974	UN=	-6.6664,-01
975	UN=	-1.0194,+00
976	UN=	-8.9286,-01
977	UN=	-3.4644,-01
978	UN=	3.6293,-01
979	UN=	9.0169,-01
980	UN=	1.0165,+00
981	UN=	6.5330,-01
982	UN=	-1.7114,-02
983	UN=	-6.7952,-01
984	UN=	-1.0224,+00
985	UN=	-8.8460,-01
986	UN=	-3.3078,-01
987	UN=	3.7862,-01
988	UN=	9.1003,-01
989	UN=	1.0136,+00
990	UN=	6.4047,-01
991	UN=	-3.3807,-02
992	UN=	-6.9223,-01
993	UN=	-1.0252,+00
994	UN=	-8.7610,-01
995	UN=	-3.1502,-01
996	UN=	3.9423,-01
997	UN=	9.1815,-01
998	UN=	1.0104,+00
999	UN=	6.2747,-01
1000	UN=	-5.0501,-02

EXECUTION TIME

0.199 SECONDS

Cowells metode , k=6 , $z^2 = 2.56$

WEST DIP.A1

BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27, 1975

951	UN=	5.5609,-14
952	UN=	3.0489,-14
953	UN=	-5.2213,-14
954	UN=	-2.8494,-14
955	UN=	4.9024,-14
956	UN=	2.6629,-14
957	UN=	-4.6030,-14
958	UN=	-2.4886,-14
959	UN=	4.3218,-14
960	UN=	2.3256,-14
961	UN=	-4.0578,-14
962	UN=	-2.1733,-14
963	UN=	3.8098,-14
964	UN=	2.0309,-14
965	UN=	-3.5770,-14
966	UN=	-1.8978,-14
967	UN=	3.3585,-14
968	UN=	1.7734,-14
969	UN=	-3.1532,-14
970	UN=	-1.6572,-14
971	UN=	2.9605,-14
972	UN=	1.5485,-14
973	UN=	-2.7796,-14
974	UN=	-1.4469,-14
975	UN=	2.6097,-14
976	UN=	1.3520,-14
977	UN=	-2.4501,-14
978	UN=	-1.2633,-14
979	UN=	2.3003,-14
980	UN=	1.1803,-14
981	UN=	-2.1597,-14
982	UN=	-1.1028,-14
983	UN=	2.0276,-14
984	UN=	1.0304,-14
985	UN=	-1.9036,-14
986	UN=	-9.6271,-15
987	UN=	1.7872,-14
988	UN=	8.9945,-15
989	UN=	-1.6779,-14
990	UN=	-8.4033,-15
991	UN=	1.5753,-14
992	UN=	7.8508,-15
993	UN=	-1.4789,-14
994	UN=	-7.3345,-15
995	UN=	1.3885,-14
996	UN=	6.8520,-15
997	UN=	-1.3035,-14
998	UN=	-6.4011,-15
999	UN=	1.2238,-14
1000	UN=	5.9798,-15

EXECUTION TIME

0.202 SECONDS

Cowells metode , k=6 , $z^2 = 3.6864$

BT DIP.A3

SIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27, 1975

951	UN=	7.3347,+07
952	UN=	-7.4934,+07
953	UN=	7.6556,+07
954	UN=	-7.8212,+07
955	UN=	7.9905,+07
956	UN=	-8.1633,+07
957	UN=	8.3400,+07
958	UN=	-8.5204,+07
959	UN=	8.7048,+07
960	UN=	-8.8931,+07
961	UN=	9.0855,+07
962	UN=	-9.2821,+07
963	UN=	9.4830,+07
964	UN=	-9.6882,+07
965	UN=	9.8978,+07
966	UN=	-1.0112,+08
967	UN=	1.0331,+08
968	UN=	-1.0554,+08
969	UN=	1.0783,+08
970	UN=	-1.1016,+08
971	UN=	1.1254,+08
972	UN=	-1.1498,+08
973	UN=	1.1747,+08
974	UN=	-1.2001,+08
975	UN=	1.2260,+08
976	UN=	-1.2526,+08
977	UN=	1.2797,+08
978	UN=	-1.3074,+08
979	UN=	1.3356,+08
980	UN=	-1.3645,+08
981	UN=	1.3941,+08
982	UN=	-1.4242,+08
983	UN=	1.4550,+08
984	UN=	-1.4865,+08
985	UN=	1.5187,+08
986	UN=	-1.5516,+08
987	UN=	1.5851,+08
988	UN=	-1.6194,+08
989	UN=	1.6545,+08
990	UN=	-1.6903,+08
991	UN=	1.7268,+08
992	UN=	-1.7642,+08
993	UN=	1.8024,+08
994	UN=	-1.8414,+08
995	UN=	1.8812,+08
996	UN=	-1.9219,+08
997	UN=	1.9635,+08
998	UN=	-2.0060,+08
999	UN=	2.0494,+08
1000	UN=	-2.0937,+08

EXECUTION TIME

0.213 SECONDS

FIN