ALMENAVDELINGEN
UNIVERSITETET I TRONDHEIM - NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
7034 TRONDHEIM - NTH

HOVEDOPPGAVE

for

stud.techn. Even Thorbergsen,

Avd. VIIB, NTH.

Innleveringsfrist: 8. april 1976.

NUMERISK MATEMATIKK: "Undersøkelse av noen metoder for løsning av baneproblemer."

Oppgaven forutsettes å omfatte:

1. Utvikling av trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder.
2. Undersøkelse av absolutt stabilitet for Størmers og Cowells metoder med og uten trigonometrisk tilpasning.
3. Utvikling av datamaskinrutiner som anvender de ovenfornevnte metoder.
4. Undersøkelse av disse rutiners egenskaper til å løse problemer av klassen $\vec{y}'' = \vec{f}(x,\vec{y})$

Trondheim, den 25. september 1975.

Tore Håvie
Avdelingsformann

Tore Håvie
Professor i Numerisk Matematikk

Innleveringsfristen er forlenget 2 måneder p.g.a. at kandidaten har vært ansatt som vit.ass., halv stilling under utførelsen av Hovedoppgaven.

Karakter : 1.25

UNDERSØKELSE AV NOEN METODER FOR LØSNING AV BANEPROBLEMER

Hovedoppgave

for

Even Thorbergsen

Institutt for numerisk matematikk,

Norges tekniske høgskole.

Forord.

Denne rapport er en sammenfatning av resultatene av arbeidet med min hovedoppgave ved NTH. Underveis er jeg blitt kyndig og inspirerende veiledet av universitetslektor Syvert P. Nørsett ved Institutt for numerisk matematikk, NTH. Jeg takker ham og resten av instituttet for gode arbeidsforhold og et tilsynelatende solid budsjett som jeg har kunnet tære kraftig på med hyppig terminalkjøring.

Norges tekniske høgskole, mars 1976,

Even Thorbergsen.

Innhold.

Betegnelser og skrivemåter.

Betegnelser:

a	x-verdi ved starten av integrasjonsintervallet.
A^2	matrise som brukes ved trigonometrisk tilpasning av en metode.
B	$\equiv \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix}$
$C(Q)$	approksimasjon til cos$Q$.
C	mengden av komplekse tall.
d	lokal trunkeringsfeil for en metode (definisjon 6.1) (betegnes av og til bare trunkeringsfeil).
d_n	d i x_n.
e	global trunkeringsfeil (definisjon 6.2).
e_n	e i x_n.
f	den funksjon som definerer problemet ($y'' = f(x,y)$).
f_n	f i x_n.
$F_k(x)$	rommet av alle funksjoner av typen $\sum_{j=0}^{k} (a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx))$, hvor a_j, b_j ikke varierer med x.
$\vec{F}_k(x)$	mengden av vektorer med elementer tilhørende $F_k(x)$.
$\vec{g}(x,\vec{y})$	$\equiv \vec{f}(x,\vec{y}) + A^2\vec{y}$
$\vec{G}(x)$	$\equiv \vec{g}(x,\vec{y}(x))$
$\vec{G}_n$	$\equiv \vec{G}(x_n)$
h	skrittlengde ved numerisk integrasjon.

$int(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ er største lukkete intervall i R som inneholder alle $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

I	enhetsmatrisen
k	er slik at $\{\vec{\phi}_{n+v-i}\}_{i=0}^{k}$ anvendes i den numeriske integrasjons-formel.
N	mengden av alle naturlige tall $(1,2,3,\ldots)$.
$O(h^r)$	betegnelse på enhver funksjon av h som oppfyller $\lim_{h\to 0} h^{-r}O(h^r) = \text{endelig konstant} \neq 0$

p	orden til en metode (definisjon 4.5).
$p(x)$	interpolasjonspolynom som brukes i PER og SC4.
$p_k(x)$	rommet av alle polynomer av grad høyst lik k.
$\vec{p}_k(x)$	mengden av vektorer med elementer tilhørende $p_k(x)$
q	Q med ett element.
Q	$\equiv hA$
R	mengden av alle reelle tall.
t	den uavhengige variabel ved integrasjonen.
TTS_n	trigonometrisk tilpasset Størmermetode, k=n.
TTC_n	trigonometrisk tilpasset Cowellmetode, k=n.
$\vec{u}_n$	numerisk approksimasjon til $\vec{y}(x_n)$.
$\vec{u}'_n$	numerisk approksimasjon til $\vec{y}'(x_n)$.
x	den uavhengige variabel ved integrasjonen.
x_n	x-verdi etter n'te skritt.
$\vec{y}$	eksakt løsning av et ordinært startverdiproblem.
$\vec{y}_n$	$\equiv \vec{y}(x_n)$
z	$\equiv \lambda h$, λ parameter i testproblemet $y'' = -\lambda^2 y$ brukt ved undersøkelse av absolutt stabilitet for en metode.
$\varepsilon(x_n)$	$\equiv h^{-p} e_n$
$\vec{\phi}_n$	$\equiv \vec{f}(x_n, \vec{u}_n)$

Skrivemåter:

$i = a(b)c$ betyr at i antar verdiene $a, a+b, a+2b, \ldots, c-2b, c-b, c$.

$i,j = 1,2$ betyr at både i og j antar verdiene 1 og 2.

Sammendrag.

Denne rapporten inneholder en undersøkelse av metoder som løser problemer av typen $\vec{y}'' = \vec{f}(x,\vec{y})$ (baneproblemer). Først generaliseres Størmers og Cowells metoder ved en trigonometrisk tilpasning. En utleder så visse egenskaper ved koeffisientene i disse metodene. Absolutt stabilitet undersøkes teoretisk og numerisk. Det gis en utledning av nødvendige elementer i tre rutiner som baserer seg på disse metoder. Rutinene brukes i en undersøkelse over i hvilke tilfelle en trigonometrisk tilpasning av Størmers og Cowells metoder gir øket effektivitet (nøyaktighet kontra tidsforbruk) ved numerisk integrasjon av baneproblemer.

Undersøkelsen viser at trigonometrisk tilpasning ikke er å anbefale for hele klassen av baneproblemer. For underklassen $\vec{y}'' = -D^2\vec{y} + \vec{r}(x)$, hvor D er en reell diagonal (eller høyst diagonaldominant) matrise og inhomogeniteten $\vec{r}$ er slik at løsningen går asymptotisk mot løsningen av det tilsvarende homogene problem, synes det imidlertid å være til dels store gevinster å hente ved trigonometrisk tilpasning. Det synes også å være fordelaktig med en slik tilpasning av de av disse metodene som er banestabile (Størmers metode,k=0,1 og Cowells metode,k=1,2,3) når en vil løse problemer av typen $\vec{y}'' = -A^2\vec{y}$, hvor egenverdiene til den reelle matrise A har stor spredning i størrelsesorden. Det er imidlertid ikke gjort numeriske undersøkelser i dette tilfelle.

1. INNLEDNING

Denne rapporten har som siktemål å presentere endel undersøkelser av kjente og nye metoder for numerisk integrasjon av systemer av ordinære differensiallikninger av typen:

$$\vec{y}''(t)=\vec{f}(t,\vec{y}) \tag{1.1}$$

Fysikalsk betraktet inneholder denne klassen av differensiallikninger matematiske beskrivelser av blant annet systemer som beveger seg i tiden uten energidissipasjon. Et eksempel er planettyngdepunktbevegelser der luftmotstand ikke er inne i bildet og stråling- og meteormotstand og liknende er neglisjerbar. Når slik motstand skal være med i beskrivelsen, inngår den vesentlig som en funksjon av y'.

De metoder som skal betraktes er lineære flerskrittsmetoder av typen:

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i \vec{u}_{n+1-i} + \sum_{j=0}^{k} \beta_j \vec{\phi}_{n+e-j} = 0 \tag{1.2}$$

Koeffisientene $\{\alpha_i\}_{i=0}^{2}$ og $\{\beta_j\}_{j=0}^{k}$ er generelt matrisefunksjoner avhengig av $\vec{f}(t,\vec{y})$, $\alpha_0 \neq 0$. e=0 gir en eksplisitt metode, mens e=1 gir en implisitt metode.

De mest kjente av disse metodene er Størmers(eksplisitte) og Cowells(implisitte) metoder. Disse har skalare koeffisienter og orden k+1. (Se definisjon 4.5) I praksis kombineres en Størmer- og en Cowellmetode med samme orden til en prediktor-korrektormetode.

Disse metodene kan generaliseres på forskjellige måter. Det mest naturlige er en trigonometrisk tilpasning slik at en løser systemer av klassen

$$\vec{y}'' + A^2\vec{y} = \vec{p}_{k-1}(t) \tag{1.3}$$

eksakt når A^2 er en konstant matrise og k refererer til (1.2). Med en slik metode skulle en kunne forvente at også problemer av typen

$$\vec{y}'' = \vec{f}(t,\vec{y}) \tag{1.4}$$

kan integreres mer effektivt (nøyaktighet kontra kostnad) enn med vanlige Størmer-Cowell-metoder dersom

$$\left\|\frac{\partial\vec{g}(x,\vec{y})}{\partial\vec{y}}\right\| << \|A^2\| \qquad (1.5a)$$

hvor

$$\vec{g}(x,\vec{y}) = \vec{f}(x,\vec{y})+A^2\vec{y} \qquad (1.5b)$$

når en velger A^2 passe (så nær opptil $-\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}$ som mulig).

Hvis $\vec{g}(x,\vec{y}) = \vec{0}$ vil løsningen være en trigonometrisk funksjon av hA som vi vil betegne med Q i fortsettelsen. En må da kunne vente at metodens koeffisienter også vil inneholde trigonometriske funksjoner av Q. For generell Q må disse funksjonene approksimeres med rasjonale funksjoner (f.eks. polynomer). Dersom Q er diagonal kan de beregnes direkte ved hjelp av datamaskin-systemets standardfunksjoner og en bedre nøyaktighet bør kunne oppnås.

2. UTLEDNING AV TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

Gitt problemet

$$\vec{y}'' + A^2\vec{y} = \vec{g}(t,\vec{y}) \tag{2.1}$$

med tilhørende homogene likning

$$\vec{y}'' + A^2\vec{y} = \vec{0} \tag{2.2}$$

Generell løsning av (2.2) er velkjent:

$$\vec{y}_h(t) = \cos(At)\vec{c}_1 + \sin(At)\,\vec{c}_2 \tag{2.3}$$

der

$$\cos(At) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(At)^{2i}}{(2i)!} \tag{2.4a}$$

og

$$\sin(At) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(At)^{2i+1}}{(2i+1)!} \tag{2.4b}$$

som da er matriser av samme dimensjon som A. For å finne en partikulærløsning av (2.1) omformes likningen til et 1. ordens problem:

$$\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \vec{y}' \\ -A^2\vec{y} + \vec{g}(t,\vec{y}) \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Betegner så $\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}' \end{pmatrix}$ med $\vec{Y}$.

Herav:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix} \vec{Y} + \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{g}(t,\vec{y}) \end{pmatrix} \tag{2.6a}$$

eller

$$\vec{Y}' = B\vec{Y} + \vec{r}(t,\vec{Y}) \tag{2.6b}$$

der

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

og

$$\vec{r}(t,\vec{y}) = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{g}(t,\vec{y}) \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

For (2.6b) kjennes følgende partikulærløsning:

$$\vec{Y}_p(t) = \int_a^t e^{B(t-\tau)}\vec{\Gamma}(\tau,\vec{Y}(\tau))d\tau \tag{2.9}$$

hvor a er en vilkårlig reell størrelse.
e^{Bt} finnes ved å betrakte (2.6b).
Ordnet:

$$\vec{Y}'-B\vec{Y} = \vec{\Gamma}(t,\vec{Y}) \tag{2.10}$$

Tilsvarende homogene problem:

$$\vec{Y}_h'-B\vec{Y}_h = \vec{0} \tag{2.11}$$

som har løsning

$$\vec{Y}_h = e^{Bt}\vec{c}_0 \tag{2.12}$$

Fra (2.3):

$$\vec{y}_h = \cos(At)\vec{c}_1 + \sin(At)\vec{c}_2$$

Herav:

$$\vec{y}_h' = -A\sin(At)\vec{c}_1 + A\cos(At)\vec{c}_2 \tag{2.13}$$

En har da:

$$\vec{c}_0 = \vec{Y}_h(0) = \begin{pmatrix}\vec{y}_h(0)\\ \vec{y}_h'(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ A\vec{c}_2\end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Fra (2.3) og (2.13):

$$\vec{Y}_h = \begin{pmatrix}\cos(At)\vec{c}_1+\sin(At)\vec{c}_2\\ -A\sin(At)\vec{c}_1+A\cos(At)\vec{c}_2\end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Ordnet:

$$\vec{Y}_h = \begin{pmatrix}\cos(At) & A^{-1}\sin(At)\\ -A\sin(At) & \cos(At)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{c}_1\\ A\vec{c}_2\end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Vi har her benyttet at alle analytiske funksjoner av en matrise kommuterer. Dette følger umiddelbart av definisjonen av analytiske funksjoner(eksistensen av eksakt potensrekkerepresentasjon).
Fra (2.12,14,16) følger at

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} \cos(At) & A^{-1}\sin(At) \\ -A\sin(At) & \cos(At) \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Innsettes (2.17) i (2.9) får en at

$$\vec{Y}_p(t) = \int_a^t \begin{bmatrix} \cos(A(t-\tau)) & A^{-1}\sin(A(t-\tau)) \\ -A\sin(A(t-\tau)) & \cos(A(t-\tau)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{g}(\tau,\vec{y}(\tau)) \end{bmatrix} d\tau \tag{2.18}$$

Altså:

$$\vec{y}_p(t) = \int_a^t A^{-1}\sin(A(t-\tau))\vec{g}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau \tag{2.19}$$

Generell løsning av problemet er da etter ordning av $y_h(t)$:

$$\vec{y}(t) = \cos(A(t-a))\vec{d}_1 + \sin(A(t-a))\vec{d}_2 + \int_a^t A^{-1}\sin(A(t-\tau)\vec{g}(\tau,\vec{y}(\tau))d\tau \tag{2.21}$$

Initialbetingelser:

$$\vec{y}(a) = \vec{y}_a \quad , \quad \vec{y}\,'(a) = \vec{y}\,'_a \tag{2.22}$$

Fra (2.21):

$$\vec{y}(a) = \vec{d}_1 = \vec{y}_a \tag{2.23}$$

$$\vec{y}\,'(t) = -A\sin(A(t-a))\vec{d}_1 + A\cos(A(t-a))\vec{d}_2 + \int_a^t A^{-1}A\cos(A(t-\tau))\vec{g}(\tau,y(\tau))d\tau \tag{2.24}$$

$$\vec{y}\,'(a) = A\vec{d}_2 = \vec{y}\,'_a \tag{2.25}$$

eller

$$\vec{d}_2 = A^{-1}\vec{y}\,'_a \tag{2.26}$$

Fra (2.21,23,26) følger nå:

$$\vec{y}(t)=\cos(A(t-a))\vec{y}_a+A^{-1}\sin(A(t-a))\vec{y}_a'+\int_a^t A^{-1}\sin(A(t-\tau))\vec{g}(\tau,y(\tau))d\tau \tag{2.27}$$

Tilsvarende kan en sette:

$$\vec{y}(t+x)=\cos(Ax)\vec{y}(t)+A^{-1}\sin(Ax)\vec{y}'(t)+\int_t^{t+x} A^{-1}\sin(A(t+x-\tau))\vec{g}(\tau,y(\tau))d\tau \tag{2.28}$$

Denne relasjonen inneholder $\vec{y}'(t)$ som ikke inngår i det opprinnelige problem. Det er derfor ønskelig å kombinere den bort. Setter:

$$\vec{\psi}(t,x) \equiv \int_t^{t+x} A^{-1}\sin(A(t+x-\tau))\vec{G}(\tau)d\tau \tag{2.29}$$

hvor

$$\vec{G}(\tau) \equiv \vec{g}(\tau,y(\tau)) \tag{2.30}$$

Fra (2.28) får en:

$$\vec{y}(t+x) = \cos(Ax)\vec{y}(t)+A^{-1}\sin(Ax)\vec{y}'(t)+\vec{\psi}(t,x) \tag{2.31}$$

$$\vec{y}(t-h) = \cos(Ah)\vec{y}(t)-A^{-1}\sin(Ah)\vec{y}'(t)+\vec{\psi}(t,-h) \tag{2.32}$$

Multipliserer så (2.31) med sin(Ah) og (2.32) med sin(Ax) og adderer:

$$\sin(Ah)\vec{y}(t+x)+\sin(Ax)\vec{y}(t-h)$$

$$\begin{aligned}&=(\sin(Ah)\cos(Ax)+\cos(Ah)\sin(Ax))\vec{y}(t)\\&\quad+\sin(Ah)\vec{\psi}(t,x)+\sin(Ax)\vec{\psi}(t,-h)\end{aligned} \tag{2.33a}$$

$$\begin{aligned}&=\sin(A(x+h))\vec{y}(t)+\int_t^{t+x} A^{-1}\sin(Ah)\sin(A(t+x-\tau))\vec{G}(\tau)d\tau\\&\quad+\int_t^{t-h} A^{-1}\sin(Ax)\sin(A(t-h-\tau))\vec{G}(\tau)d\tau\end{aligned} \tag{2.33b}$$

Setter så

$$\tau' \equiv t + \frac{x}{h}(t-\tau) \tag{2.34a}$$

i siste integral I. Motsatt:

$$\tau = t + \frac{h}{x}(t-\tau') \tag{2.34b}$$

Det gir:

$$\vec{I} = \int_t^{t+x} A^{-1}\sin(Ax)\sin(A(-\frac{h}{x}(t-\tau')-h))\vec{G}(t+\frac{h}{x}(t-\tau'))\frac{h}{x}(-d\tau') \tag{2.35a}$$

$$= \int_t^{t+x} A^{-1}\frac{h}{x}\sin(Ax)\sin(A\frac{h}{x}(t+x-\tau'))\vec{G}(t+\frac{h}{x}(t-\tau'))d\tau' \tag{2.35b}$$

Fra (2.33b) og (2.35b) følger da til slutt:

$$\begin{aligned}\sin(Ah)\vec{y}(t+x) = {} & \\ & \sin(A(x+h))\vec{y}(t)-\sin(Ax)\vec{y}(t-h) \\ & +A^{-1}\int_t^{t+x}\{\sin(Ah)\sin(A(t+x-\tau)\vec{G}(\tau) \\ & \quad + \frac{h}{x}\sin(Ax)\sin(A\frac{h}{x}(t+x-\tau))\vec{G}(t+\frac{h}{x}(t-\tau))\}d\tau\end{aligned} \tag{2.36}$$

Lenger enn dette er det ikke mulig å komme eksakt uten kjennskap til $\vec{G}$. Nå erstattes derfor $G(\tau)$ med et interpolasjonspolynom. Betegner:

$$\vec{G}_j = \vec{G}(\tau_j) \tag{2.37}$$

og

$$\tau_n = t \tag{2.38}$$

Integrasjonen i (2.36) skal nå gå fra t-vh til t-vh+rh innsatt Newtons bakoverdifferansformel basert på gitteret $\{\tau_{n-j}\}_{j=0}^{k}$. v antar verdiene 0 og 1, og $r\varepsilon[0,1]$.

$$\vec{G}(\tau) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\prod_{i=0}^{j-1}(\tau-\tau_{n-i})}{j!\,h^j}\nabla^j\vec{G}_n + \frac{\prod_{i=0}^{k}(\tau-\tau_{n-i})}{(k+1)!}\vec{G}^{(k+1)}(\xi(\tau)) \tag{2.39}$$

hvor

$$\xi(\tau)\varepsilon\mathrm{int}(\tau,\tau_n,\tau_{n-k}) \tag{2.40}$$

Normerer til

$$s = \frac{\tau-\tau_n}{h} \tag{2.41}$$

Det gir:

$$\vec{F}(s)\equiv\vec{G}(\tau(s)) = \sum_{j=0}^{k} \frac{hs\cdot h(s+1)\cdot h(s+2)\cdots h(s+j-1)}{j!\; h^j}\nabla^j\vec{G}_n$$

$$+\frac{hs\cdot h(s+1)\cdot h(s+2)\cdots h(s+k)}{(k+1)!}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s)) \tag{2.42}$$

der

$$\eta(s)\equiv\xi(\tau(s)) \tag{2.43}$$

Altså:

$$\vec{F}(s) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\frac{(-s)!}{j!(-s-j)!}\nabla^j\vec{G}_n$$

$$+(-1)^{k+1}h^{k+1}\frac{(-s)!}{(k+1)!(-s-(k+1))!}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s)) \tag{2.44}$$

$$=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j\vec{G}_n + (-1)^{k+1}h^{k+1}\binom{-s}{k+1}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s)) \tag{2.45}$$

Integrerer nå (2.36) fra t-vh til t+(r-v)h:

$$\vec{D}\equiv\sin(Ah)\vec{y}(t+(r-v)h)-\sin(Ah(r+1))\vec{y}(t-vh)+\sin(Ahr)\vec{y}(t-(v+1)h)$$

$$=A^{-1}\int_{t-vh}^{t+(r-v)h}\{\sin(A(t+(r-v)h-\tau))\sin(Ah)\vec{G}(\tau)$$

$$+\frac{1}{r}\sin(A\,\frac{1}{r}(t+(r-v)h-\tau))\sin(Ahr)\vec{G}(\frac{r+1}{r}(t-vh)-\frac{\tau}{r})\}\cdot d\tau \tag{2.46}$$

Normerer også her til s og setter Ah=Q (τ=t+sh):

$$\vec{D} = A^{-1}\int_{-v}^{r-v}\{\sin(Q(r-v-s))\sin Q\cdot\vec{F}(s)$$

$$+\frac{1}{r}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))\sin(Qr)\;\vec{F}(-\frac{r+1}{r}v-\frac{s}{r})\}h\cdot ds \tag{2.48}$$

Setter så inn (2.45) i (2.48):

$$\vec{D} = h^2Q^{-1}\int_{-v}^{r-v}\{\sin(Q(r-v-s))\sin Q\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{-s}{j}\nabla^j\vec{G}_n$$

$$+\frac{1}{r}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))\sin(Qr)\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{j}\nabla^j\vec{G}_n\}ds$$

$$+(-1)^{k+1}h^{k+2}A^{-1}\int_{-v}^{r-v}\{\sin(Q(r-v-s))\sin Q\binom{-s}{k+1}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))$$
$$+\frac{1}{r}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))\sin(Qr)\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{k+1} \tag{2.49}$$
$$\cdot\vec{G}^{(k+1)}(\eta(-\frac{r+1}{r}v-\frac{s}{r}))\}ds$$

Definerer så $\sigma_j(Q,r,v)$ ved

$$\vec{D} \equiv h^2\sin Q\sum_{j=0}^{k}\sigma_j(Q,r,v)\nabla^j\vec{G}_n+\sin Q\cdot\vec{R}_k \tag{2.50}$$

Det vil si at:

$$\sigma_j(Q,r,v) = (-1)^jQ^{-1}\int_{-v}^{r-v}\{\sin(Q(r-v-s))\binom{-s}{j}$$
$$+(r\sin Q)^{-1}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))\sin(Qr) \tag{2.51}$$
$$\cdot\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{j}\}ds$$

$\vec{R}_k$ behandles senere. Innfører genererende funksjon for koeffisientene:

$$K(Q,r,v,\rho) \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j(Q,r,v)\rho^j \tag{2.52}$$

$$K(Q,r,v,\rho)$$
$$= Q^{-1}\int_{-v}^{r-v}\{\sin(Q(r-v-s))\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-s}{j}\rho^j\}ds \tag{2.53}$$
$$+Q^{-1}(r\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\int_{-v}^{r-v}\{\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{j}$$
$$\cdot\rho^j\}ds$$

$$= Q^{-1}\int_{-v}^{r-v}\sin(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s}ds \tag{2.54}$$
$$+(Qr\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\int_{-v}^{r-v}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))(1-\rho)^{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}ds$$

Setter:

$$I_1 = \int_{-v}^{r-v}\sin(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s}ds \tag{2.55}$$

Ved delvis integrasjon:

$$I_1 = [\sin(Q(r-v-s))(-\frac{(1-\rho)^{-s}}{\ln(1-\rho)})]_{-v}^{r-v}$$

$$-\int_{-v}^{r-v}(-Q)\cos(Q(r-v-s))(-\frac{(1-\rho)^{-s}}{\ln(1-\rho)})ds \quad (2.56)$$

$$= \frac{\sin(Qr)(1-\rho)^v}{\ln(1-\rho)} - \frac{Q}{\ln(1-\rho)}\int_{-v}^{r-v}\cos(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s}ds \quad (2.57)$$

Setter videre:

$$I_3 = \int_{-v}^{r-v}\cos(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s}ds \quad (2.58)$$

Tilsvarende fås:

$$I_3 = -\frac{(1-\rho)^{v-r}}{\ln(1-\rho)} - \frac{\cos(Qr)(-(1-\rho)^v)}{\ln(1-\rho)} + \frac{Q}{\ln(1-\rho)}\int_{-v}^{r-v}\sin(Q(r-v-s))(1-\rho)^{-s}ds \quad (2.59)$$

Settes (2.59) inn i (2.57) finnes eksplisitt:

$$I_1 = \{(\ln(1-\rho))^2 I+Q^2\}^{-1}(1-\rho)^v\{\sin(Qr)\ln(1-\rho)+Q(1-\rho)^{-r}-Q\cos(Qr)\} \quad (2.61)$$

Setter nå

$$I_2 = \int_{-v}^{r-v}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))(1-\rho)^{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}ds \quad (2.62)$$

To ganger delvis integrasjon og ordning gir:

$$I_2 = \{(\ln(1-\rho))^2 I+Q^2\}^{-1}(1-\rho)^v r\{-\sin Q\ln(1-\rho)+Q(1-\rho)-Q\cos Q\} \quad (2.63)$$

Setter (2.61) og (2.63) inn i (2.54):

$$K(Q,r,v,\rho) = \{(\ln(1-\rho))^2 I+Q^2\}^{-1}(1-\rho)^v\{(1-\rho)^{-r}-\cos(Qr) + (1-\rho-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\} \quad (2.64)$$

Ønsker nå å finne en rekursjonsformel for koeffisientene $\sigma_j(Q,r,v)$ fra den genererende funksjon $K(Q,r,v,\rho)$.

Fra (2.52) og (2.64) har en:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j \rho^j \{(\ln(1-\rho))^2 I + Q^2\}$$
$$= (1-\rho)^v \{(1-\rho)^{-r} - \cos(Qr) + (1-\rho-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\} \qquad (2.65)$$

Utvikler med hensyn på ρ:

$$-\ln(1-\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{1-x}\,dx = \int_0^\rho \sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1}dx = \sum_{j=1}^{\infty}\int_0^\rho x^{j-1}dx \qquad (2.66a,b,c)$$

$$\ln(1-\rho) = -\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\rho^j \qquad (2.66d)$$

$$(\ln(1-\rho))^2 = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}\rho^j\right)^2 \qquad (2.67a)$$
$$= \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j(m-j)}\rho^m \qquad (2.67b)$$
$$= \sum_{m=2}^{\infty} S_m \rho^m \qquad (2.67c)$$

der

$$S_m = \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j(m-j)} \qquad \text{(Se tabell 2.1)} \qquad (2.68)$$

$$(1-\rho)^v = 1-v\rho \qquad (2.69)$$

siden v bare antar verdiene 0 og 1.

$$(1-\rho)^{-r} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-r}{j}\rho^j \qquad (2.70)$$

Innsatt i (2.64):

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma_j\rho^j\{Q^2 + I(\sum_{m=2}^{\infty}S_m\rho^m)\}$$
$$= (1-v\rho)\{I\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\binom{-r}{i}\rho^i - \cos(Qr) \qquad (2.71)$$
$$+((1-\rho)I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\}$$

Innfører k=j+m på venstre side og k=i på høyre side og ordner likningen:

$$
\begin{aligned}
&Q^2(\sigma_0+\sigma_1\rho)+\sum_{k=2}^{\infty}\Big(\sigma_k Q^2+\sum_{j=0}^{k-2}\sigma_j S_{k-j}\Big)\rho^k \\
&\quad = I\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\rho^k\Big\{\binom{-r}{k}+v\binom{-r}{k-1}\Big\}+(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) \\
&\qquad -\cos(Qr)+I+\{v(\cos(Qr)-(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)) \\
&\qquad -(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\}\rho+v(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)\rho^2
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Betrakter (2.72) for hver potens av ρ.

ρ^0:

$$Q^2\sigma_0 = (I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-\cos(Qr)+I \tag{2.73}$$

Herav:

$$\sigma_0 = Q^{-2}\{(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)+I-\cos(Qr)\} \tag{2.74}$$

ρ^1:

$$
\begin{aligned}
Q^2\sigma_1 &= -I(-r+v)+v(\cos(Qr)-(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)) \\
&\quad -(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)
\end{aligned}
\tag{2.75}
$$

Det vil si:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= Q^{-2}\{rI-(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-v((I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) \\
&\qquad +I-\cos(Qr))\}
\end{aligned}
\tag{2.76a}
$$

$$= Q^{-2}\{rI-(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-v\sigma_0\} \tag{2.76b}$$

ρ^2:

$$\sigma_2 Q^2+\sigma_0 S_2 = I\Big(\binom{-r}{2}-vr\Big)+v(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) \tag{2.77}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_2 &= Q^{-4}\Big\{\binom{-r}{2}Q^2+v((\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-rI)Q^2 \\
&\qquad -(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-I+\cos(Qr)\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.78a}
$$

$$= Q^{-2}\Big\{\binom{-r}{2}+v((\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-rI)-\sigma_0\Big\} \tag{2.78b}$$

Tabell 2.1. $S_m = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j(m-j)}$, m=2(1)20.

m	S_m	
	Eksakt	Numerisk
2	1	1.000000000
3	1	1.000000000
4	$\frac{11}{12}$	0.916666667
5	$\frac{5}{6}$	0.833333333
6	$\frac{137}{180}$	0.761111111
7	$\frac{7}{10}$	0.700000000
8	$\frac{363}{560}$	0.648214286
9	$\frac{761}{1260}$	0.603968254
10	$\frac{7129}{12600}$	0.565793651
11		0.532539683
12		0.503312891
13		0.477417027
14		0.454304822
15		0.433541644
16		0.414778624
17		0.397732823
18		0.382172503
19		0.367906114
20		0.354773966

ρ^k, $k \geq 3$:

$$\sigma_k Q^2 + \sum_{j=0}^{k-2} \sigma_j S_{k-j} = (-1)^k \left(\binom{-r}{k} + v\binom{-r}{k-1}\right) I \tag{2.79}$$

Ordnet:

$$\sigma_k = Q^{-2}\left\{(-1)^k\left(\binom{-r}{k} + v\binom{-r}{k-1}\right)I - \sum_{j=0}^{k-2} S_{k-j}\sigma_j\right\} \tag{2.80}$$

En kan da stille opp følgende rekursjonsformel for $\{\sigma_j\}_{j=0}^{\infty}$:

$$\sigma_0 = Q^{-2}\{(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) + I - \cos(Qr)\} \tag{2.81a}$$

$$\sigma_1 = Q^{-2}\{rI - (\sin Q)^{-1}\sin(Qr) - v((I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) + I - \cos(Qr))\} \tag{2.81b}$$

$$\sigma_2 = Q^{-4}\left\{\left(\binom{-r}{2} + v((\sin Q)^{-1}\sin(Qr) - rI)\right)Q^2 - (I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) - I + \cos(Qr)\right\} \tag{2.81c}$$

$$\sigma_j = Q^{-2}\left\{(-1)^j\left(\binom{-r}{j} + v\binom{-r}{j-1}\right)I - \sum_{i=0}^{j-2} S_{j-i}\sigma_i\right\}, j \geq 3 \tag{2.81d}$$

Fra (2.81) fås nå:

$$\sigma_3 = Q^{-4}\left\{-\left(\binom{-r}{3} + v\binom{-r}{2}\right)Q^2 + (\sin Q)^{-1}\sin(Qr) - rI + (v-1)((I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) + I - \cos(Qr))\right\} \tag{2.83}$$

$$\sigma_4 = Q^{-6}\left\{\left(\binom{-r}{4} + v\binom{-r}{3}\right)Q^4 - \binom{-r}{2}Q^2 + (1-v)Q^2((\sin Q)^{-1}\sin(Qr) - rI) + \left(\left(v - \frac{11}{12}\right)Q^2 + I\right)((I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) + I - \cos(Qr))\right\} \tag{2.84}$$

Fra (2.46) og (2.50) følger at den generelle integrasjonsformel kan skrives:

$$\vec{u}_{n-v+r} = (\sin Q)^{-1}\{\sin(Q(r+1))\vec{u}_{n-v} - \sin(Qr)\vec{u}_{n-v-1}\} + h^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j(Q,r,v)\nabla^j \vec{G}_n \tag{2.85}$$

Med r=1 følger fra (2.85) to integrasjonsformler:
v=0: Trigonometrisk tilpasset Størmermetode(eksplisitt).
v=1: Trigonometrisk tilpasset Cowellmetode(implisitt).
Fra (2.81a,b,c,83,84) følger nå:

Størmerkoeffisientene(r=1,v=0):

$$\sigma_0 = Q^{-2}\{2I-2\cos Q\} \tag{2.86}$$

$$\sigma_1 = 0 \tag{2.87}$$

$$\sigma_2 = Q^{-4}\{Q^2-2I+2\cos Q\} \tag{2.88}$$

$$\sigma_3 = Q^{-4}\{Q^2-2I+2\cos Q\} \tag{2.89}$$

$$\sigma_4 = Q^{-6}\{Q^4-\frac{17}{6}Q^2+2I+(\frac{11}{6}Q^2-2I)\cos Q\} \tag{2.90}$$

Cowellkoeffisientene(r=1,v=1):

$$\sigma_0^* = Q^{-2}\{2I-2\cos Q\} = \sigma_0 \tag{2.91}$$

$$\sigma_1^* = Q^{-2}\{-2I+2\cos Q\} = -\sigma_0 \tag{2.92}$$

$$\sigma_2^* = Q^{-4}\{Q^2-2I+2\cos Q\} = \sigma_2 \tag{2.93}$$

$$\sigma_3^* = 0 \tag{2.94}$$

$$\sigma_4^* = Q^{-6}\{-\frac{5}{6}Q^2+2I-(\frac{1}{6}Q^2+2I)\cos Q\} \tag{2.95}$$

Ønsker nå å finne de tilsvarende β-koeffisientene som er slik at:

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j \vec{G}_{n-j} = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i \nabla^i \vec{G}_n \tag{2.96}$$

En har at:

$$\nabla^i \vec{G}_n = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \vec{G}_{n-j} \tag{2.97}$$

Setter inn (2.97) i (2.96):

$$\sum_{j=0}^{k} \beta_j \vec{G}_{n-j} = \sum_{i=0}^{k} \sigma_i \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \vec{G}_{n-j} \tag{2.98a}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \{(-1)^j \sum_{i=j}^{k} \binom{i}{j} \sigma_i\} \vec{G}_{n-j} \tag{2.98b}$$

Altså:

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{k} \binom{i}{j} \sigma_i \tag{2.99}$$

I anvendelsene vil k=4 benyttes.

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^{4} \binom{i}{j} \sigma_i \tag{2.100}$$

Herav fås:

$$\beta_0 = \sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\sigma_4 \tag{2.101}$$

$$\beta_1 = -(\sigma_1+2\sigma_2+3\sigma_3+4\sigma_4) \tag{2.102}$$

$$\beta_2 = \sigma_2+3\sigma_3+6\sigma_4 \tag{2.103}$$

$$\beta_3 = -(\sigma_3+4\sigma_4) \tag{2.104}$$

$$\beta_4 = \sigma_4 \tag{2.105}$$

Innfører følgende matrisefunksjoner:

$$T_1(Q,r) = (I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(Qr)+I-\cos(Qr) \tag{2.106}$$

$$T_2(Q,r) = ((\sin Q)^{-1}\sin(Qr)-rI)Q^2 \tag{2.107}$$

Setter nå inn i (2.101-105):

$$\begin{aligned}\beta_0 = Q^{-6}\{&((1-v)Q^4+(2v-\tfrac{35}{12})Q^2+I)T_1(Q,r)\\ &+((v-1)Q^2+(2-v)I)T_2(Q,r)\\ &+((1-v)(\tbinom{-r}{2}-\tbinom{-r}{3})+\tbinom{-r}{4})Q^4-\tbinom{-r}{2}Q^2\}\end{aligned} \tag{2.108}$$

$$\begin{aligned}\beta_1 = Q^{-6}\{&(vQ^4+(\tfrac{26}{3}-7v)Q^2-4I)T_1(Q,r)\\ &+((1-2v)Q^2+(2v-7)I)T_2(Q,r)\\ &+((3v-2)\tbinom{-r}{2}+(3-4v)\tbinom{-r}{3}-4\tbinom{-r}{4})Q^4+4\tbinom{-r}{2}Q^2\}\end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\begin{aligned}\beta_2 = Q^{-6}\{&((9v-\tfrac{19}{2})Q^2+6I)T_1(Q,r)+(vQ^2+(9-6v)I)T_2(Q,r)\\ &+((1-3v)\tbinom{-r}{2}+(6v-3)\tbinom{-r}{3}+6\tbinom{-r}{4})Q^4-6\tbinom{-r}{2}Q^2\}\end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}\beta_3 = Q^{-6}\{&((\tfrac{14}{3}-5v)Q^2-4I)T_1(Q,r)+(4v-5)T_2(Q,r)\\ &+(v\tbinom{-r}{2}+(1-4v)\tbinom{-r}{3}-4\tbinom{-r}{4})Q^4+4\tbinom{-r}{2}Q^2\}\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}\beta_4 = Q^{-6}\{&((v-\tfrac{11}{12})Q^2+I)T_1(Q,r)+(1-v)T_2(Q,r)\\ &+(v\tbinom{-r}{3}+\tbinom{-r}{4})Q^4-\tbinom{-r}{2}Q^2\}\end{aligned} \tag{2.112}$$

Fra (2.85) og (2.96) følger integrasjonsformelen(k=4):

$$\begin{aligned}\vec{u}_{n+r-v} = {} & (\sin Q)^{-1}\{\sin(Q(r+1))\vec{u}_{n-v}-\sin(Qr)\vec{u}_{n-v-1}\}\\ &+\sum_{j=0}^{4}\beta_j(Q,r,v)(h^2\vec{\phi}_{n-j}+Q^2\vec{u}_{n-j})\end{aligned} \tag{2.113}$$

Går nå over til å betrakte spesialtilfeller.

Prediktorkoeffisienter(r=1,v=0):

$$\beta_0 = Q^{-6}\{5Q^4 - \frac{41}{6}Q^2 + 2I + (-2Q^4 + \frac{35}{6}Q^2 - 2I)\cos Q\} \tag{2.114}$$

$$\beta_1 = Q^{-6}\{-9Q^4 + \frac{64}{3}Q^2 - 8I + (-\frac{52}{3}Q^2 + 8I)\cos Q\} \tag{2.115}$$

$$\beta_2 = Q^{-6}\{10Q^4 - 25Q^2 + 12I + (19Q^2 - 12I)\cos Q\} \tag{2.116}$$

$$\beta_3 = Q^{-6}\{-5Q^4 + \frac{40}{3}Q^2 - 8I + (-\frac{28}{3}Q^2 + 8I)\cos Q\} \tag{2.117}$$

$$\beta_4 = Q^{-6}\{Q^4 - \frac{17}{6}Q^2 + 2I + (\frac{11}{6}Q^2 - 2I)\cos Q\} \tag{2.118}$$

Prediktorformelen blir da:

$$\vec{u}_{n+1} = 2\cos Q \cdot \vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} + \sum_{j=0}^{4} \beta_j (h^2 \vec{\phi}_{n-j} + Q^2 \vec{u}_{n-j}) \tag{2.119}$$

Korrektorkoeffisienter(r=1,v=1):

$$\beta_0^* = Q^{-6}\{Q^4 - \frac{17}{6}Q^2 + 2I + (\frac{11}{6}Q^2 - 2I)\cos Q\} \tag{2.120}$$

$$\beta_1^* = Q^{-6}\{\frac{22}{3}Q^2 - 8I + (-2Q^4 - \frac{10}{3}Q^2 + 8I)\cos Q\} \tag{2.121}$$

$$\beta_2^* = Q^{-6}\{Q^4 - 7Q^2 + 12I + (Q^2 - 12I)\cos Q\} \tag{2.122}$$

$$\beta_3^* = Q^{-6}\{\frac{10}{3}Q^2 - 8I + (\frac{2}{3}Q^2 + 8I)\cos Q\} \tag{2.123}$$

$$\beta_4^* = Q^{-6}\{-\frac{5}{6}Q^2 + 2I - (\frac{1}{6}Q^2 + 2I)\cos Q\} = -\frac{1}{4}\beta_3^* \tag{2.124}$$

Korrektorformel(idet alle indekser adderes med 1):

$$\vec{u}_{n+1} = 2\cos Q \cdot \vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} + \beta_0^* (h^2 \vec{\phi}_{n+1} + Q^2 \vec{u}_{n+1}) + \sum_{j=1}^{4} \beta_j^* (h^2 \vec{\phi}_{n+1-j} + Q^2 \vec{u}_{n+1-j}) \tag{2.125}$$

hvor

$$\vec{\phi}_{n+1} = f(t_{n+1}, \vec{u}_{n+1}) \tag{2.126}$$

Interpolasjonskoeffisienter for PERDIAG(v=1):

$$\beta_0(r) = Q^{-6}\{(-\tfrac{11}{6}Q^2+I)T_1 + T_2 + \binom{-r}{4}Q^4-\binom{-r}{2}Q^2\} \qquad (2.127)$$

$$\beta_1(r) = Q^{-6}\{(Q^4+\tfrac{5}{3}Q^2-4I)T_1 - (Q^2+3I)T_2 \qquad (2.128)$$
$$+(\binom{-r}{2}-\binom{-r}{3}-4\binom{-r}{4})Q^4+4\binom{-r}{2}Q^2\}$$

$$\beta_2(r) = Q^{-6}\{(-\tfrac{1}{2}Q^2+6I)T_1 + (Q^2+3I)T_2 \qquad (2.129)$$
$$+(-2\binom{-r}{2}+3\binom{-r}{3}+6\binom{-r}{4})Q^4-6\binom{-r}{2}Q^2\}$$

$$\beta_3(r) = Q^{-6}\{-(\tfrac{1}{3}Q^2+4I)T_1 - T_2 \qquad (2.130)$$
$$+(\binom{-r}{2}-3\binom{-r}{3}-4\binom{-r}{4})Q^4+4\binom{-r}{2}Q^2\}$$

$$\beta_4(r) = Q^{-6}\{(\tfrac{1}{12}Q^2+I)T_1 + (\binom{-r}{3}+\binom{-r}{4})Q^4-\binom{-r}{2}Q^2\} \qquad (2.131)$$

Interpolasjonsformelen kan da uttrykkes således:

$$\vec{u}_{n-1+r} = (\sin Q)^{-1}(\sin(Q(r+1))\vec{u}_{n-1}-\sin(Qr)\vec{u}_{n-2}) \qquad (2.132)$$
$$+\sum_{j=0}^{4}\beta_j(r)(h^2\vec{\phi}_{n-j}+Q^2\vec{u}_{n-j})$$

Når metoden skal anvendes i praksis er det ønskelig å kunne halvere og doble skrittlengden. Ved halvering må $u_{n-\frac{1}{2}}$ og $u_{n-\frac{3}{2}}$ beregnes (henholdsvis $r=\frac{1}{2}$ og $r=-\frac{1}{2}$). (PERDIAG)

Koeffisientene blir i dette tilfelle:

$r = \frac{1}{2}$:

$$\beta_0(\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(-\tfrac{11}{12}Q^2+I)T_1(\tfrac{1}{2})+T_2(\tfrac{1}{2})+\tfrac{35}{128}Q^4-\tfrac{3}{8}Q^2\} \qquad (2.133)$$

$$\beta_1(\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(Q^4+\tfrac{5}{3}Q^2-4I)T_1(\tfrac{1}{2})-(Q^2+3I)T_2(\tfrac{1}{2})-\tfrac{13}{32}Q^4+\tfrac{3}{2}Q^2\} \qquad (2.134)$$

$$\beta_2(\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(-\tfrac{1}{2}Q^2+6I)T_1(\tfrac{1}{2})+(Q^2+3I)T_2(\tfrac{1}{2})-\tfrac{3}{64}Q^4-\tfrac{9}{4}Q^2\} \qquad (2.135)$$

$$\beta_3(\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{-(\tfrac{1}{3}Q^2+4I)T_1(\tfrac{1}{2})-T_2(\tfrac{1}{2})+\tfrac{7}{32}Q^4+\tfrac{3}{2}Q^2\} \qquad (2.136)$$

$$\beta_4(\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(\tfrac{1}{12}Q^2+I)T_1(\tfrac{1}{2})-\tfrac{5}{128}Q^4-\tfrac{3}{8}Q^2\} \qquad (2.137)$$

$r = -\frac{1}{2}$:

$$\beta_0(-\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(-\tfrac{11}{12}Q^2+I)T_1(-\tfrac{1}{2})+T_2(-\tfrac{1}{2})-\tfrac{5}{128}Q^4+\tfrac{1}{8}Q^2\} \qquad (2.138)$$

$$\beta_1(-\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(Q^4+\tfrac{5}{4}Q^2-4I)T_1(-\tfrac{1}{2})-(Q^2+3I)T_2(-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{32}Q^4-\tfrac{1}{2}Q^2\} \qquad (2.139)$$

$$\beta_2(-\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(-\tfrac{1}{2}Q^2+6I)T_1(-\tfrac{1}{2})+(Q^2+3I)T_2(-\tfrac{1}{2})+\tfrac{13}{64}Q^4+\tfrac{3}{4}Q^2\} \qquad (2.140)$$

$$\beta_3(-\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{-(\tfrac{1}{3}Q^2+4I)T_1(-\tfrac{1}{2})-T_2(-\tfrac{1}{2})-\tfrac{5}{32}Q^4-\tfrac{1}{2}Q^2\} \qquad (2.141)$$

$$\beta_4(-\tfrac{1}{2}) = Q^{-6}\{(\tfrac{1}{12}Q^2+I)T_1(-\tfrac{1}{2})+\tfrac{3}{128}Q^4+\tfrac{1}{8}Q^2\} \qquad (2.142)$$

Her er:

$$T_1(\tfrac{1}{2}) = (I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}Q)+I-\cos(\tfrac{1}{2}Q) \qquad (2.143)$$

$$T_2(\tfrac{1}{2}) = ((\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}Q)-\tfrac{1}{2}I)Q^2 \qquad (2.144)$$

$$T_1(-\tfrac{1}{2}) = -(I-\cos Q)(\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}Q)+I-\cos(\tfrac{1}{2}Q) \qquad (2.145)$$

$$T_2(-\tfrac{1}{2}) = -((\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}Q)-\tfrac{1}{2}I)Q^2 = -T_2(\tfrac{1}{2}) \qquad (2.146)$$

En har da fra (2.132):

$$\vec{u}_{n-\frac{1}{2}} = (\sin Q)^{-1}(\sin(\tfrac{3}{2}Q)\vec{u}_{n-1}-\sin(\tfrac{1}{2}Q)\vec{u}_{n-2})+h^2\sum_{j=0}^{4}\beta_j(\tfrac{1}{2})\vec{G}_{n-j} \qquad (2.147)$$

$$\vec{u}_{n-\frac{3}{2}} = (\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{1}{2}Q)(\vec{u}_{n-1}+\vec{u}_{n-2})+h^2\sum_{j=0}^{4}\beta_j(-\tfrac{1}{2})\vec{G}_{n-j} \qquad (2.148)$$

De klassiske Størmer- og Cowellkoeffisienter.

Fra (2.81) fås som spesialtilfellet Q=0 og r=1:

$$\sigma_0 = I \tag{2.149}$$

$$\sigma_1 = -vI \tag{2.150}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{12}I \tag{2.151}$$

Selve rekursjonsformelen fås fra (2.79):

$$\sum_{j=0}^{k-2} S_{k-j}\sigma_j = (-1)^k((-1)^k+(-1)^{k-1}v)I \quad , k \geq 3 \tag{2.152}$$

eller

$$S_2\sigma_{k-2} = (1-v)I - \sum_{j=0}^{k-3} S_{k-j}\sigma_j \quad , k \geq 3 \tag{2.153}$$

Med $S_2=1$ og $i=k-2$ forenkles dette til

$$\sigma_i = (1-v)I - \sum_{j=0}^{i-1} S_{i+2-j}\sigma_j \quad , i \geq 1 \tag{2.154}$$

Fra (2.149) og (2.154) følger nå:

$$\sigma_1 = (1-v)I-S_3\sigma_0 \tag{2.155a}$$

$$= -vI \tag{2.155b}$$

$$\sigma_2 = (1-v)I-S_4\sigma_0-S_3\sigma_1 \tag{2.156a}$$

$$= \frac{1}{12}I \tag{2.156b}$$

(2.155b) og (2.156b) stemmer med henholdvis (2.150) og (2.151)
Rekursjonsformelen kan da enklest uttrykkes (skalart):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0(v) &= 1 \\ \sigma_j(v) &= 1-v - \sum_{i=0}^{j-1} S_{j+2-i}\sigma_i(v) \quad , j \geq 1 \end{aligned}\right. \tag{2.157}$$

(2.157) gir koeffisientene i de klassiske Størmer(v=0) og Cowellmetoder(v=1). (Jfr. Lemma 3.2)

Tabell 2.2. Koeffisientene i Størmers og Cowells metoder.

k	σ_k (Størmer)	σ_k^* (Cowell)
0	1	1
1	0	-1
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{19}{240}$	$-\frac{1}{240}$
5	$\frac{3}{40}$	$-\frac{1}{240}$
6	$\frac{863}{12096}$	$-\frac{221}{60480}$
7	$\frac{275}{4032}$	$-\frac{19}{6048}$
8	$\frac{33953}{518400}$	$-\frac{9829}{3628800}$
9	$\frac{8183}{129600}$	$-\frac{407}{172800}$
10	$\frac{3250433}{53222400}$	$-\frac{330157}{159667200}$

Metodens lokale trunkeringsfeil.

Betrakter så trunkeringsfeilen i den generelle metode. Fra (2.49,50):

$$\vec{R}_k = (-1)^{k+1}h^{k+2}A^{-1}\int_{-v}^{r-v}\{\sin(Q(r-v-s))\cdot\binom{-s}{k+1}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))$$
$$+(r\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{Q}{r}(r-v-s))\sin(Qr)$$
$$\cdot\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{k+1}\cdot\vec{G}^{(k+1)}(\eta(-\tfrac{r+1}{r}v-\tfrac{s}{r}))\}ds \tag{2.158}$$

Siden $\sin(Q(r-v-s))$, $\sin Q$, $\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s))$ og $\sin(Qr)$ avhenger av den ukjente Q, er det ikke mulig å anvende middelverdisetningen på integralet. Derimot kan en beregne en skranke for $||\vec{R}_k||_\infty$.
Definerer operatoren M:

$$M(\cdot) \equiv \underset{s\varepsilon[-v,r-v]}{\text{maks}}(||\cdot||_\infty) \tag{2.159}$$

En har da fra (2.158):

$$||\vec{R}_k||_\infty = h^{k+3}||\int_{-v}^{r-v}\{Q^{-1}\sin(Q(r-v-s))\binom{-s}{k+1}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))$$
$$+(rQ\sin Q)^{-1}\sin(\tfrac{Q}{r}(r-v-s))\sin(Qr) \tag{2.160}$$
$$\cdot\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{k+1}\vec{G}^{(k+1)}(\eta(-\tfrac{r+1}{r}v-\tfrac{s}{r}))\}ds||_\infty$$

$$\leq h^{k+3}\int_{-v}^{r-v}\{M(Q^{-1}\sin(Q(r-v-s)))\cdot M(\binom{-s}{k+1})\cdot M(\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))$$
$$+M((r\sin Q)^{-1}\sin(Qr))\cdot M(Q^{-1}\sin(\tfrac{Q}{r}(r-v-s)) \tag{2.161}$$
$$\cdot M\binom{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{k+1}\cdot M(\vec{G}^{(k+1)}(\eta(-\tfrac{r+1}{r}v+\tfrac{s}{r})))\}ds$$

Forutsetter $r\varepsilon[0,1]$. En har da:

$$M(Q^{-1}\sin(Q(r-v-s))) \leq M((r-v-s)I) \leq r \tag{2.162}$$

$$M(\binom{-s}{k+1}) = |\binom{-1}{k+1}| = 1 \tag{2.163}$$

$M(\vec{G}^{(k+1)}(\eta(s))$ forutsettes endelig. $(\leq||G^{(k+1)}_{\text{maks}}||_\infty)$ (2.164)

$$r(\sin Q)^{-1}\sin(Qr) = (rQ)^{-1}\sin(Qr)\cdot(\sin Q)^{-1}Q \tag{2.165}$$

Herav:

$$M((r\sin Q)^{-1}\sin(Qr)) \leqq ||(\sin Q)^{-1}Q|| \leqq \frac{\pi}{2} \text{ når } ||Q||_\infty \leqq \frac{\pi}{2} \quad (2.166)$$

fordi spektralradien for matriser er høyst lik normen til matrisen svarende til en vilkårlig l_p-norm for tilhørende vektorer.

$$M(Q^{-1}\sin(\frac{Q}{r}(r-v-s)) \leqq M(1-\frac{v+s}{r}) \leqq 1 \quad (2.167)$$

$$M(\frac{\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r}}{k+1}) \leqq \text{maks}(1,(\frac{2}{k+1})) \leqq 2 \quad (2.168)$$

fordi $\frac{r+1}{r}v+\frac{s}{r} \varepsilon [1,2]$.

$$M(\vec{G}^{k+1}(\eta(-\frac{r+1}{r}v-\frac{s}{r}))) \text{ forutsettes begrenset } (\leqq ||\vec{G}^{(k+1)}{}_{\text{maks}}||_\infty) \quad (2.169)$$

når $s' = -\frac{r+1}{r}v-\frac{s}{r}$ er begrenset og i dette tilfelle er s' begrenset: $s'\varepsilon[-2,-1]$.

En har da:

$$||\vec{R}_k||_\infty \leqq h^{k+3}(r\cdot 1\cdot ||\vec{G}^{(k+1)}{}_{\text{maks}}||_\infty + \frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot ||\vec{G}^{(k+1)}{}_{\text{maks}}||_\infty)r \quad (2.170)$$

Altså:

$$||\vec{R}_k||_\infty \leqq (r+\pi)r||\vec{G}^{(k+1)}{}_{\text{maks}}||_\infty h^{k+3} \quad (2.171)$$

hvor $||\vec{G}^{(k+1)}{}_{\text{maks}}||_\infty = \underset{x\varepsilon[-2,1]}{\text{maks}}||\vec{G}^{(k+1)}(\eta(x))||_\infty$

når $r\varepsilon[0,1]$ og $||Q||_\infty \leqq \frac{\pi}{2}$.

Definisjon 2.1. *Gitt en numerisk metode for løsning av et ordinært startverdiproblem. Hvis denne metode anvendes på problemer hvis eksakte løsning er et polynom så sies metoden å være av algebraisk orden k dersom den gir eksakt løsning (bortsett fra avrundingsfeil) når løsningen tilhører* $P_k(t)$*, men ikke eksakt løsning når løsningen er et (k+1)-gradspolynom.*

Definisjon 2.2. *Gitt en numerisk metode for løsning av et ordinært startverdiproblem. Hvis denne metode anvendes på et problem hvis eksakte løsning er en trunkert Fourierrekke, så sies metoden å være av trigonometrisk orden k med parameter* ω *dersom den gir eksakt løsning (når alle beregninger gjøres eksakt) når løsningen tilhører* $F_k(\omega t)$ *hvor t er den frie variable, men ikke eksakt løsning når løsningen utspenner hele* $F_{k+1}(\omega t)$.

Vi ser av (2.171) at $||\vec{R}_k|| \propto ||\vec{G}^{(k+1)}_{maks}||$. Det betyr at metoden integrerer eksakt hvis $\vec{G} \in \vec{P}_k$. Siden $\vec{G} \equiv \vec{y}''+A^2\vec{y}$ følger da at $\vec{y} \in \vec{P}_{k+2}$ når $A^2 \equiv 0$ og $\vec{y} \in \vec{F}_1(At) \oplus \vec{P}_k(t)$ når $A^2 \not\equiv 0$. Det betyr at Størmers og Cowells metoder er av algebraisk orden k+2, mens de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder er av algebraisk orden k og trigonometrisk orden 1 når A^2 er konstant.

Vi ser også at trunkeringsfeilen er $O(h^{k+3})$.

3. NOEN SETNINGER OM DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

I dette kapittelet presenteres visse setninger med bevis som gjelder for koeffisientene til og orden av de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder. Resultatene er hentet fra arbeider utført av min veileder universitetslektor Syvert P. Nørsett. Disse foreligger til nå som kladd.

For enkelthets skyld regnes skalart($Q = q$ (1×1 matrise)).

Lemma 3.1. *Det fins polynomer $R_m(q^2)$ og $I_m(q^2)$, $m \geq 0$, av grad = 1 slik at:*

$$\sigma_m(q) = q^{-\alpha_m}(R_m(q^2)+\cos(q)\cdot I_m(q^2)) \tag{3.1}$$

hvor $\dfrac{R_m(0)}{I_m(0)} = -1$

og $$\alpha_m = \begin{cases} m+2 \text{ , } m \text{ like} \\ m+1 \text{ , } m \text{ odde} \end{cases} \quad m \geq 0 \tag{3.2}$$

Bevis: Fra (2.81) følger med r=1 og v=0:

$$\sigma_0 = 2q^{-2}(1-\cos q) \tag{3.3a}$$

$$\sigma_1 = 0 \tag{3.3b}$$

(2.81d) kan utvides til å gjelde j=2 i dette spesialtilfellet. (Bruker m for j):

$$\sigma_m = q^{-2}(1-\sum_{i=0}^{m-2} S_{m-i}\sigma_i(q)) \text{ , } m \geq 2 \tag{3.3c}$$

$\{S_i\}_i$ er gitte konstanter(tabell 2.1).

Spesielt har en (2.86-90) :

$$\sigma_0(q) = 2q^{-2}(1-\cos q) \Rightarrow R_0(q^2) = 2,\ I_0(q^2) = -2,\ \sigma_0 = 2 \qquad (3.4)$$

$$\sigma_1(q) = 0 \Rightarrow R_1(q^2) = 0\ ,\ I_1(q^2) = 0\ ,(\sigma_1 = 2) \qquad (3.5)$$

$$\sigma_2(q) = 2q^{-4}(\tfrac{1}{2}q^2 - 1 + \cos q) \Rightarrow R_2(q^2) = q^2 - 2,\ I_2(q^2) = 2,\ \sigma_2 = 4 \qquad (3.6)$$

$$\sigma_3(q) = \sigma_2(q) \Rightarrow R_3(q^2) = q^2 - 2\ ,\ I_3(q^2) = 2\ ,\ \sigma_3 = 4 \qquad (3.7)$$

$$\sigma_4(q) = q^{-6}(q^4 - \tfrac{17}{6}q^2 + 2 + \cos q(\tfrac{11}{6}q^2 - 2))$$

$$\Rightarrow R_4(q^2) = q^4 - \tfrac{17}{6}q^2 + 2\ ,\ I_4(q^4) = \tfrac{11}{6}q^2 - 2\ ,\ \sigma_4 = 6 \qquad (3.8)$$

Vi ser at Lemma 3.1 er riktig for m=0,1,2,3,4.
Anta at Lemma 3.1 er riktig for $0 \leq m \leq n-1$, $n \geq 2$. (*)
Av (3.1) og (3.3) fås da:

$$\sigma_n(q) = q^{-2}(1 - \sum_{i=0}^{n-2} S_{n-j}q^{-\alpha_i}(R_i(q^2) + \cos q \cdot I_i(q^2)) \qquad (3.9)$$

$$= q^{-(\alpha_{n-2}+2)}(R_n(q^2) + \cos q \cdot I_n(q^2)) \qquad (3.10)$$

hvor

$$R_n(q^2) = q^{\alpha_{n-2}} - \sum_{j=0}^{n-2} S_{n-i}q^{\alpha_{n-2}-\alpha_i}R_i(q^2) \qquad (3.11)$$

og

$$I_n(q^2) = -\sum_{i=0}^{n-2} S_{n-i}q^{\alpha_{n-2}-\alpha_i}I_i(q^2) \qquad (3.12)$$

$R_n(q^2)$ og $I_n(q^2)$ er polynomer fordi $\alpha_{n-2} \geq \alpha_i$, i=0(1)n-2.
Herav følger umiddelbart at (3.2) gjelder for m=n.
Setter n = 2k , $k \in N$:

$$I_{2k}(q^2) = -\sum_{i=0}^{2k-2} S_{2k-1}q^{\alpha_{2k-2}-\alpha_i}I_i(q^2) \qquad (3.13)$$

$$I_{2k}(0) = -(\sum_{i=0}^{2k-3} S_{2k-i}q^{\alpha_{2k-2}-\alpha_i}I_i(q^2) + S_2q^0 I_{2k-2}(q^2))\big|_{q=0} \qquad (3.14a)$$

$$= -I_{2k-2}(0) \qquad (3.14b)$$

fordi fra (3.2) og (*) følger:

$$i < 2k-2 \Rightarrow \alpha_i < \alpha_{2k-2} \Rightarrow \alpha_{2k-2} - \alpha_i > 0 \qquad (3.15a,b,c)$$

Tilsvarende har en :

$$i \leq 2k-3 \Rightarrow i < 2k-1 \Rightarrow \alpha_{2k-1}-\alpha_i > 0 \qquad (3.17a,b,c)$$

Det gir da med n = 2k+1:

$$I_{2k+1}(0) = -\sum_{i=0}^{2k-1} S_{2k+1-i} q^{\alpha_{2k-i}-\alpha_i} I_i(q^2)|_{q=0} \qquad (3.19a)$$

$$= -(\sum_{i=0}^{2k-3} S_{2k+1-i} q^{\alpha_{2k-1}-\alpha_i} \cdot I_i(q^2)|_{q=0} \qquad (3.19b)$$

$$-S_3 q^0 I_{2k-2}(0) - S_2 q^0 I_{2k-1}(0)$$

$$= -(I_{2k-2}(0)+I_{2k-1}(0)) \qquad (3.19c)$$

Tilsvarende fås for $R_n(q^2)$:

$$R_{2k}(0) = -R_{2k-2}(0) \qquad (3.20)$$

$$R_{2k+1}(0) = -(R_{2k-2}(0)+R_{2k-1}(0)) \qquad (3.21)$$

Herav:

$$\frac{R_{2k}(0)}{I_{2k}(0)} = \frac{R_{2k-2}(0)}{I_{2k-2}(0)} = -1 \qquad (3.22)$$

Siste likhet følger fra induksjonshypotesen (*). Videre:

$$\frac{R_{2k+1}(0)}{I_{2k+1}(0)} = \frac{R_{2k-2}(0)+R_{2k-1}(0)}{I_{2k-2}(0)+I_{2k-1}(0)} \qquad (3.23a)$$

$$= \frac{-I_{2k-2}(0)-I_{2k-1}(0)}{I_{2k-2}(0)+I_{2k-1}(0)} = -1 \qquad (3.23b)$$

En har dermed vist at (3.1) gjelder for m = n.
Lemma 3.1 følger da ved induksjon. Q.E.D.

<u>Lemma 3.2.</u> *For $m \geqq 0$ gjelder:*

$$\lim_{q\to 0} \sigma_m(q) = \sigma_m(0) = \sigma_m \tag{3.24}$$

hvor σ_m er de vanlige Størmerkoeffisientene.
Da følger:

$$-\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} = \cos q - \frac{\sigma_m}{I_m(0)} q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \tag{3.25}$$

Bevis: Fra integralrepresentasjonen av $\sigma_m(q)$ ((2.51) med r=1 og v=0):

$$\sigma_m(q) = (-1)^m q^{-1} \int_0^1 \sin(q(1-s))\{\binom{-s}{m}+\binom{s}{m}\}ds \tag{3.26}$$

Herav:

$$\lim_{q\to 0} \sigma_m(q) = (-1)^m \int_0^1 \lim_{q\to 0}(\frac{\sin(q(1-s))}{q(1-s)})(1-s)\{\binom{-s}{m}+\binom{s}{m}\}ds \tag{3.27}$$

$$= (-1)^m \int_0^1 (1-s)\{\binom{-s}{m}+\binom{s}{m}\}ds \tag{.28}$$

$$= \sigma_m \qquad |1, \text{side } 291|$$

(3.24) er bevist.

Fra Lemma 3.1:

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2)\cdot q^{-\alpha_m}\{-(-\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)}) + \cos q\} \tag{3.29}$$

Fra (3.24):

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2)\{-\kappa_m + O(q^2)\} \tag{3.30}$$

der

$$\kappa_m = -\frac{\sigma_m}{I_m(0)} \tag{3.31}$$

Altså:

$$\sigma_m(q) = I_m(q^2)\cdot q^{-\alpha_m}\{-\kappa_m q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2})\} \tag{3.32}$$

eller

$$\cos q + \frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} = -\kappa_m q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \tag{3.33}$$

Herav:

$$-\frac{R_m(q^2)}{I_m'(q^2)} = \cos q - \frac{m}{I_m(0)} q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \tag{3.34}$$

(3.25) er bevist. Q.E.D.

<u>Teorem 3.1.</u> *La $a_m(q)$ være koeffisienter gitt ved*

$$\sigma a_m(q) \equiv q^{-\alpha_m}(R_m(q^2)+I_m(q^2)\cdot C(q)) \tag{3.35}$$

det vil si de koeffisienter en får ved å erstatte cosq i $\sigma_m(q)$ med approksimasjonen C(q) som er en polynomisk eller rasjonal funksjon av q. Hvis C(q) innsettes i den trigonometrisk tilpassete Størmermetode fås:

$$u_{n+1} - 2C(q)u_n + u_{n-1} = h^2 \sum_{m=0}^{k} \sigma a_m(q)\nabla^m(\phi_n + A^2 u_n) \tag{3.36}$$

Med C(q) = cosq er metodens trunkeringsfeil $O(h^{k+3})$ uansett q. Et nødvendig og tilstrekkelig vilkår for at trunkeringsfeilen i (3.36) er $O(h^{k+3})$ for alle q er at:

$$C(q) = \cos q + O(q^{\alpha_k+2}) \tag{3.37}$$

hvor α_k refererer til Lemma 3.1.

Bevis: En har at:

$$\nabla^m z(x_n) = O(h^m) \tag{3.38}$$

I (3.36) vil derfor perturbasjonen $\sigma a_m(q)-\sigma_m(q)$ multipliseres med en faktor $O(h^{m+2})$ i trunkeringsfeilen. Siden trunkeringfeilen med eksakt cos(q) er $O(h^{k+3})$, kan perturbasjonen i $\sigma_m(q)$ være $O(h^{k+3-(m+2)}) = O(h^{k-m+1})$. En må minst ha:

$$\lim_{q\to 0} \sigma a_m(q) = \sigma_m(0) = \sigma_m \tag{3.39}$$

det vil si cos(q)-approksimasjon av minst 1. orden. Bruker nå samme teknikk som ved beviset av (3.25) i Lemma 3.2:

$$\sigma a_m(q) = I_m(q^2)q^{-\alpha_m}\left\{\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} + C(q)\right\} \tag{3.40}$$

Fra (3.39):

$$\sigma a_m(q) = I_m(q^2)\,\{\kappa_m + O(q^2)\} \tag{3.41}$$

der

$$\kappa_m = -\frac{\sigma_m}{I_m(0)} \tag{3.42}$$

eller

$$\sigma a_m(q) = I_m(q^2)q^{-\alpha_m}\left\{-\frac{\sigma_m}{I_m(0)}\,q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2})\right\} \tag{3.43}$$

Herav:

$$\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} + C(q) = \frac{\sigma_m}{I_m(0)}\,q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \tag{3.44}$$

eller

$$C(q) = -\frac{R_m(q^2)}{I_m(q^2)} + \frac{\sigma_m}{I_m(0)}\,q^{\alpha_m} + O(q^{\alpha_m+2}) \tag{3.45}$$

Fra Lemma 3.2 (3.25) følger:

$$C(q) = \cos(q) + O(q^{\alpha_m+2}) \tag{3.46}$$

Dette skal gjelde for alle m=0(1)k.
Det vil si at:

$$C(q) = \cos(q) + O(q^{\alpha_k+2}) \tag{3.47}$$

siden α_m øker monotont med m.
Vi har dermed vist at (3.37) er nødvendig for å beholde trunkeringsfeil av $O(h^{k+3})$ for alle q. Anta så at (3.37) også er tilstrekkelig. Da følger fra (3.35) og Lemma 3.2:

$$\sigma a_m(q) = q^{-\alpha_m}\{R_m(q^2) + I_m(q^2)\cdot(\cos(q) + O(q^{\alpha_k+2}))\} \tag{3.48}$$

$$= \sigma_m(q) + O(q^{\alpha_k+2-\alpha_m}) \tag{3.49}$$

Altså:

$$\sigma a_m(q) - \sigma_m(q) = O(q^{\alpha_k-\alpha_m+2}) \tag{3.50}$$

Fra innlednigen av beviset følger at:

$$\alpha_k-\alpha_m+2 \geqq k-m+1 \tag{3.51}$$

for at dette skal være riktig. Bruker nå Lemma 3.1.(3.2):

i) k odde, m odde

$$\alpha_k-\alpha_m+2 = k+1-m-1+2 = k-m+2 \geqq k-m+1 \tag{3.52}$$

ii) k odde, m like

$$\alpha_k-\alpha_m+2 = k+1-m-2+2 = k-m+1 \geqq k-m+1 \tag{3.53}$$

iii) k like, m odde

$$\alpha_k-\alpha_m+2 = k+2-m-1+2 = k-m+3 \geqq k-m+1 \tag{3.54}$$

iv) k like, m like

$$\alpha_k-\alpha_m+2 = k+2-m-2+2 = k-m+2 \geqq k-m+1 \tag{3.55}$$

Herved følger at antakelsen om at (3.37) også er tilstrekkelig, er riktig. Q.E.D.

En kan analogt vise at Lemma 3.1 og 3.2 og Teorem 3.1 gjelder tilsvarende for den trigonometrisk tilpassete Cowellmetode.

<u>Sats 3.1.</u> *For $\sigma_j(Q,r,v)$ gitt i (2.81) gjelder:*

$$\sigma_0(Q,r,1) = \sigma_0(Q,r,0) \tag{3.56a}$$

$$\sigma_j(Q,r,1) = \sigma_j(Q,r,0) - \sigma_{j-1}(Q,r,0) \quad , \; j \geq 1 \tag{3.56b}$$

Bevis: Fra (2.65) har en at:

$$K(Q,r,1,\rho) = (1-\rho)K(Q,r,0,\rho) \tag{3.57}$$

Innsetting av definisjonen av den genererende funksjon K(2.52):

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q,r,1)\rho^j = (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q,r,0)\rho^j \tag{3.58a}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q,r,0)\rho^j - \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(Q,r,0)\rho^{j+1} \tag{3.58b}$$

$$= \sigma_0(Q,r,0) + \sum_{j=1}^{\infty} (\sigma_j(Q,r,0) - \sigma_{j-1}(Q,r,0))\rho^j \tag{3.58c}$$

Siden (3.58c) gjelder for alle ρ må (3.56) være oppfylt.

Q.E.D.

4. ABSOLUTT STABILITET AV STØRMERS OG COWELLS METODER.

Vi ønsker i dette kapittelet å undersøke stabilitetsegenskapene til Størmers og Cowells metoder som er på formen

$$u_{n+1-v}-2u_{n-v}+u_{n-1-v} = h^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j(v)\nabla^j\phi_n \tag{4.1}$$

hvor $\sigma_j(v)$ er gitt ved (2.157).(v=0:Størmer, v=1:Cowell)
En vil her bruke skalare betegnelser for enkelthets skyld.
Teorien er stort sett hentet fra arbeider utført av Syvert P. Nørsett.

Først defineres noen sentrale begreper:

<u>Definisjon 4.1.</u> *En <u>lineær k-skrittsmetode</u> for numerisk løsning av $y'' = f(x,y)$ med initialverdier defineres ved to polynomer av grad k (eller lavere for ett av polynomene) $\mu(s)$ og $\nu(s)$:*

$$\mu(s) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j s^j \quad , \quad \nu(s) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j s^j$$

Metoden er da:

$$\mu(E)u_n = h^2\nu(E)\phi_n \tag{4.2}$$

der E er forskyvningsoperatoren.
(Det er her underforstått at metoden krever en startmetode.)

<u>Definisjon 4.2.</u> *Metoden (4.2) kalles <u>absolutt stabil</u> for $z^2 \epsilon S$, S åpen, $S \subset C$ hvis og bare hvis alle røttene r i*

$$\mu(r) + z^2\nu(r) = 0 \tag{4.3}$$

oppfyller $|r|<1$, $\forall z^2 \epsilon S$,
hvor $z = \lambda h$, λ testparameter.
Ellers kalles metoden <u>absolutt ustabil.</u>

<u>Definisjon 4.3.</u> *Metoden (4.2) kalles <u>banestabil</u> for $z^2 \epsilon B \subset C$ hvis og bare hvis alle røttene r i (4.3) er forskjellige og slik at $|r| = 1$, $\forall z^2 \epsilon B$.*

Definisjon 4.4. *Metoden (4.2) sies å være L-stabil hvis og bare hvis alle røttene r i (4.3) oppfyller* $\lim_{|z^2|\to\infty} |r| = 0$.

Definisjon 4.5. *Metoden (4.2) sies å være av orden p hvis og bare hvis for* $y \in C^\infty([a,b])$:

$$\mu(E)y_n - h^2\nu(E)f_n = C_{p+2}h^{p+2}y^{(p+2)}(x_n) + O(h^{p+3}) \tag{4.4}$$

(Denne definisjonen må ikke blandes sammen med definisjonen av algebraisk orden i kapittel 2.)

Vi vil i det følgende bevise noen setninger.

Lemma 4.1. *For koeffisientene i Størmers(σ_m) og Cowells(σ_m^*) metoder gjelder:*

$$0 < \sigma_{m+1} < \sigma_m \ , \ m \geq 3 \tag{4.5}$$

$$\sigma_m^* < \sigma_{m+1}^* \ , \ m \geq 5 \tag{4.6}$$

$$\sigma_m^* < 0 \ , \ m \geq 4 \tag{4.7}$$

Bevis: Fra (2.51) har en ($r=1, v=0, Q\to 0$):

$$\sigma_m = (-1)^m \int_0^1 (1-s)\{\binom{-s}{m}+\binom{s}{m}\}ds \tag{4.8a}$$

$$= (-1)^m \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!}\{(-s)(-s-1)\cdots(-s-m+1)+s(s-1)\cdots(s-m+1)\}ds \tag{4.8b}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!}\{(1+s)(2+s)\cdots(m-1+s)-(1-s)(2-s)\cdots(m-1-s)\}ds \tag{4.8c}$$

Herav fås:

$$\begin{aligned}\sigma_m - \sigma_{m+1} = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!}\{&(m+1)(1+s)(2+s)\cdots(m-1+s)\\ &-(1+s)(2+s)\cdots(m-1+s)(m+s)\\ &+(1-s)(2-s)\cdots(m-1-s)(m-s)\\ &-(m+1)(1-s)(2-s)\cdots(m-1-s)\}ds\end{aligned} \tag{4.9a}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!}\{(m+1-m-s)(1+s)(s+s)\cdots(m-1+s) \tag{4.9b}$$

$$+(m-s-m-1)(1-s)(2-s)\cdots(m-1-s)\}ds$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!}(1-s^2)\{\psi(s)-\psi(-s)\}ds \tag{4.10}$$

hvor

$$\psi(s) \equiv (2+s)(3+s)\cdots(m-1+s) \quad , \; m \geqq 3 \tag{4.11}$$

Men

$$\psi(s) - \psi(-s) = \int_{-s}^{s} \psi'(x)dx \quad , \; s \varepsilon [0,1] \tag{4.12}$$

Fra regelen om derivasjon av produkt følger:

$$\psi'(x) = \frac{\psi(x)}{2+x} + \cdots + \frac{\psi(x)}{m-1+x} \tag{4.13}$$

$$= \psi(x) \cdot V(x) \tag{4.14}$$

hvor

$$V(x) \equiv \sum_{k=2}^{m-1} \frac{1}{k+x} \tag{4.15}$$

En har for $x \; \varepsilon \; [-1,1]$:

$$\psi(x) \geqq (m-2)! \tag{4.16}$$

og

$$V(x) \geqq \frac{1}{3} \tag{4.17}$$

Da er:

$$\psi'(x) \geqq \frac{(m-2)!}{3} \quad , \; x \; \varepsilon \; [-1,1] \tag{4.18}$$

Det betyr at

$$\psi(s) - \psi(-s) \geqq \frac{2(m-2)!}{3} s \tag{4.19}$$

Innsatt i (4.10) fås da:

$$\sigma_m - \sigma_{m+1} = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{(m+1)!}(1-s^2)\frac{2(m-2)!}{3}s\,ds = \frac{1}{30(m+1)m(m-1)} > 0 \tag{4.20}$$

Videre har en fra (4.8c),(4.16) og (4.19):

$$\sigma_m = \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!}\{(1+s)\psi(s) - (1+s)\psi(-s)\}ds \tag{4.21}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!}\{\psi(s)-\psi(-s)+s(\psi(s)+\psi(-s)\}ds \tag{4.22}$$

$$\geqq \int_0^1 \frac{(1-s)s}{m!}\{\frac{2(m-2)!}{3}\ s+s(m-2)!\}ds \tag{4.23}$$

$$= \frac{2}{9m(m-1)} \tag{4.24}$$

Altså:

$$\sigma_m \geqq \frac{2}{9m(m-1)} > 0 \quad , m \geqq 3$$

(4.5) er bevist.

En har tilsvarende fra (2.51) med $r=1, v=1, Q \to 0$:

$$\sigma_m^* = (-1)^m \int_{-1}^0 (-s)\{\binom{-s}{m}+\binom{2+s}{m}\}ds \tag{4.25}$$

$$= (-1)^m \int_0^1 (1-s)\{\binom{1-s}{m}+\binom{1+s}{m}\}ds \tag{4.26}$$

$$= (-1)^m \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!}\{(1-s)(-s)(-s-1)\cdots(-s-m+2) + (1+s)s(s-1)\cdots(s-m+2)\}ds \tag{4.27a}$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)}{m!}\{(s-1)s(1+s)(2+s)\cdots(m-2+s) + (-s-1)(-s)(1-s)(2-s)\cdots(m-2-s)\}ds \tag{4.27b}$$

$$\sigma_{m+1}^*-\sigma_m^* = \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!}\{(s-1)s(1+s)(2+s)\cdots(m-1+s)$$

$$-(m+1)(s-1)s(1+s)\cdots(m-2+s) \tag{4.28}$$

$$+(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)\cdots(m-1-s)$$

$$-(m+1)(-1-s)(-s)(1-s)\cdots(m-2-s)\}ds$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!}\{[(s-1)s(1+s)(2+s)(m-1+s)$$

$$-(m+1)(s-1)s(1+s)(2+s)]\psi^*(s) \tag{4.29}$$

$$+[(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)(m-1-s)$$

$$-(m+1)(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)\psi^*(-s)]\}ds$$

hvor

$$\psi^*(s) \equiv (3+s)(4+s)\cdots(m-2+s) \quad , \; m\geq 5 \tag{4.30}$$

Herav:

$$\sigma_{m+1}^*-\sigma_m^* = \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!}\{[(s-1)s(1+s)(2+s)(m-1+s-m-1)]\psi^*(s) \tag{4.31a}$$

$$+[(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)(m-1-s-m-1)]\psi^*(-s)\}ds$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)}{(m+1)!}\{(-2+s)(-1+s)s(1+s)(2+s)\psi^*(s) \tag{4.31b}$$

$$+(-2-s)(-1-s)(-s)(1-s)(2-s)\psi^*(-s)\}ds$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-s)(-2+s)(-1+s)s(1+s)(2+s)}{(m+1)!}(\psi^*(s)-\psi^*(-s))ds \tag{4.31c}$$

Analogt har en:

$$\psi^*(s) - \psi^*(-s) = \int_{-s}^{s} \psi^{*\prime}(x)dx \tag{4.32}$$

Her er:

$$\psi^{*\prime}(x) = \psi^*(x)\cdot V^*(x) \tag{4.33}$$

hvor

$$V^*(x) \equiv \sum_{k=3}^{m-2} \frac{1}{(k+x)} \tag{4.34}$$

For $x \varepsilon [-1,1]$ har en:

$$\psi^*(x) \geqq (m-1)! \tag{4.35}$$

$$V^*(x) \geqq \frac{1}{2} \tag{4.36}$$

Altså:

$$\psi^{*\prime}(x) \geqq \frac{(m-1)!}{2} \quad , \ x \ \varepsilon \ [-1,1] \tag{4.37}$$

Det vil si:

$$\psi^*(s) - \psi^*(-s) \geqq (m-1)!s \tag{4.38}$$

Innsatt i (4.31c):

$$\sigma^*_{m+1} - \sigma^*_m = \int_0^1 \frac{(m-1)!}{(m+1)!}(1-s)(-2+s)(-1+s)s^2(1+s)(2+s)ds \tag{4.39}$$

$$= \frac{47}{30(m+1)m} \quad , \ m \geqq 5$$

Altså:

$$\sigma^*_{m+1} - \sigma^*_m \geqq \frac{47}{30(m+1)m} > 0 \quad , \ m \geqq 5$$

Hermed er (4.6) bevist.

Fra Sats 3.1 har en at:

$$\sigma^*_m = \sigma_m - \sigma_{m-1} \quad , \ m \geqq 1$$

(4.5) gir da:

$$\sigma^*_m < 0 \quad , \ m \geqq 4$$

(4.7) er bevist. Q.E.D.

4.1. Noen satser angående absolutt stabilitet av Størmers og Cowells metoder.

Anta at metoden (4.1) har orden $p=2m+1$, $m\varepsilon N$, $m\geq 1$.
Fra definisjon 4.5 følger da med $y(t)=e^{i\lambda t}$:

$$\mu(e^{iz})+z^2\nu(e^{iz}) = C_{p+2}h^{p+2}(i\lambda)^{p+2}+C_{p+3}(hi\lambda)^{p+3}+O(h^{p+4}) \tag{4.40a}$$

$$= (-1)^m C_{p+3}z^{p+3}+i(-1)^{m+1}C_{p+2}z^{p+2}+O(z^{p+4}) \tag{4.40b}$$

hvor $z=h\lambda$.
La $r(z)$ være røttene til (4.3):

$$\mu(r(z))+z^2\nu(r(z)) = 0 \tag{4.40c}$$

tilsvarende dobbeltrøtter 1 for $z=0$.
Setter

$$r(z) \equiv e^{iz} + f(z) \tag{4.41}$$

$$f(z) = f_0(z)+if_1(z) \quad , \; f(z) = O(z) \quad (f(0)=0) \tag{4.42}$$

Innsatt i (4.40c):

$$\mu(e^{iz}+f)+z^2\nu(e^{iz}+f) = 0 \tag{4.43}$$

Taylorutvikling:

$$\mu(e^{iz})+f\cdot\mu'(e^{iz})+O(f^2)+z^2\nu(e^{iz})+z^2\nu'(e^{iz})f+O(z^2f^2) = 0 \tag{4.44}$$

Setter inn (4.40b) i (4.44) og ordner:

$$(\mu'(e^{iz})+z^2\nu'(e^{iz}))f+O(f^2)(1+z^2) = -(-1)^m C_{p+3}z^{p+3} -i(-1)^{m+1}C_{p+2}z^{p+2}+O(z^{p+4}) \tag{4.45}$$

Herav ser en at:

$$f = O(z^{p+2}) \text{ eller lavere} \tag{4.46}$$

Nå er:

$$\mu(e^{iz}) = \mu(1)+\mu'(1)(e^{iz}-1)+ \frac{1}{2}\mu''(1)(e^{iz}-1)^2+O(z^3) \qquad (4.47)$$

Fra (4.1) fås at:

$$\mu(s) = (s^2-2s+1)p_{k-1-v}(s) \qquad (4.48)$$

Herav:

$$\mu(1) = \mu'(1) = 0 \qquad (4.49)$$

Dette gjelder generelt for konsistente metoder for løsning av 2. ordens problemer. Innsatt i (4.47):

$$\mu(e^{iz}) = - \frac{z^2}{2} \mu''(1) + O(z^3) \qquad (4.50)$$

Likeledes har en at:

$$\mu'(e^{iz}) = \mu'(1)+(e^{iz}-1)\mu''(1)+ \frac{1}{2}(e^{iz}-1)^2\mu'''(1)+O(z^3) \qquad (4.51a)$$

$$= \mu''(1)zi - \frac{z^2}{2}(\mu''(1)+\mu'''(1))+O(z^3) \qquad (4.51b)$$

$$= a_0zi+a_1z^2+O(z^3) \qquad (4.51c)$$

der

$$a_0 \equiv \mu''(1) \;,\; a_1 \equiv - \frac{1}{2}(\mu''(1)+\mu'''(1)) \qquad (4.52)$$

For ν har vi analogt:

$$\nu(e^{iz}) = \nu(1)+\nu'(1)(iz- \frac{z^2}{2} +O(z^3))$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \nu''(1) \;(-z^2+O(z^3)) + O(z^3) \qquad (4.53a)$$

$$= \{\nu(1)- \frac{1}{2}z^2\nu'(1)- \frac{1}{2}z^2\nu''(1)\}+i\{\nu'(1)z\}+O(z^3) \qquad (4.53b)$$

$$\nu'(e^{iz}) = \nu'(1)+\nu''(1)(iz- \frac{z^2}{2} +O(z^3))+ \frac{1}{2}\nu'''(1)(-z^2+O(z^3))+O(z^3) \qquad (4.54a)$$

$$= \{\nu'(1)- \frac{1}{2}(\nu''(1)+\nu'''(1))z^2\}+\nu''(1)zi+O(z^3) \qquad (4.54b)$$

$$= b_0zi + \{\nu'(1)+b_1z^2\}+O(z^3) \qquad (4.54c)$$

der $b_0 \equiv \nu''(1)$, $b_1 \equiv -\frac{1}{2}(\nu''(1)+\nu'''(1))$ (4.55)

Innsatt i (4.45):

$$\begin{aligned}(a_0 zi+a_1z^2+z^2\nu'(1))(f_0+if_1) &+ O(fz^3)+O(f^2)(1+z^2)\\ &= (-1)^{m+1}C_{p+3}z^{p+3} + i(-1)^m C_{p+2}z^{p+2}+O(z^{p+4})\end{aligned} \tag{4.56}$$

Ordnet:

$$\begin{aligned}(a_1+\nu'(1))f_0z^2-a_0f_1z + a_0f_0z+(a_1+\nu'(1))f_1z^2\, i&+O(fz^3)\\ &+O(f^2)(1+z^2)\\ &= (-1)^{m+1}C_{p+3}z^{p+3}+i(-1)^m C_{p+2}z^{p+2}+O(z^{p+4})\end{aligned} \tag{4.57}$$

Av (4.46) og (4.57):

$$(a_1+\nu'(1))zf_0-a_0f_1 = (-1)^{m+1}C_{p+3}z^{p+2}+O(z^{p+3}) \tag{4.58a}$$

$$a_0f_0+(a_1+\nu'(1))f_1z = (-1)^m C_{p+2}z^{p+1}+O(z^{p+3}) \tag{4.58b}$$

Anta $f_1 = O(z^{p+2})$. (4.59)

Da følger fra (4.58b):

$$f_0(z) = \frac{(-1)^m C_{p+2}}{\mu''(1)} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \tag{4.60}$$

(4.60) innsatt i (4.58a):

$$\begin{aligned}f_1(z) = (-\tfrac{1}{2}\mu''(1)-\tfrac{1}{2}\mu'''(1)+\nu'(1))\frac{1}{\mu''(1)}(-1)^m\frac{C_{p+1}}{\mu''(1)}\, z^{p+2}\\ +(-1)^m C_{p+3}z^{p+2}\frac{1}{\mu''(1)} + O(z^{p+3})\end{aligned} \tag{4.61}$$

Likningssystemet (4.58) har nøyaktig en løsning. Siden antakelsen om orden av f_1 brukt i (4.58b) stemmer med (4.58a) må antakelsen være riktig.

(4.61) ordnet:

$$f_1(z) = (-1)^m\{\mu''(1)C_{p+3}+[\nu'(1)-\frac{1}{2}(\mu''(1)+\mu'''(1))]C_{p+2}\} \cdot\frac{1}{(\mu''(1))^2}z^{p+2}+O(z^{p+3}) \tag{4.62}$$

Ved henholdvis 2 og 3 gangers derivasjon av (4.40b) med hensyn på z og innsatt z=0 fås:

$$\mu''(1) = 2\nu(1) \tag{4.63}$$

$$\mu'''(1) = 6\nu'(1)-6\nu(1) \tag{4.64}$$

(4.63) innsatt i (4.64) gir:

$$\nu'(1) = \frac{1}{6}\mu'''(1)+\frac{1}{2}\mu''(1) \tag{4.65}$$

Altså:

$$f_1(z) = (-1)^m\{\mu''(1)C_{p+3}-\frac{1}{3}\mu'''(1)C_{p+2}\}z^{p+2}+O(z^{p+3}) \tag{4.66}$$

Absoluttverdien til røttene følger da fra det foregående.

Fra (4.41):

$$r = e^{iz}+f(z)$$

Det vil si at:

$$|r|^2 = 1+|f|^2+2\cdot\mathrm{Re}(e^{iz}\overline{f(z)}) \tag{4.67}$$

(4.42) gir da:

$$|r|^2 = 1+f_0^2+f_1^2+2(f_0\cos z+f_1\sin z) \tag{4.68}$$

$$= 1+2f_0(1-\frac{z^2}{2}+O(z^4))+2f_1(z+O(z^3))+f_0^2+f_1^2 \tag{4.69}$$

Ved bruk av (4.60) og (4.66):

$$|r|^2 = 1+2\frac{(-1)^m C_{p+2}}{\mu''(1)}z^{p+1}+O(z^{p+2}) \tag{4.70a}$$

$$= 1+A(p,\mu)z^{p+1}+O(z^{p+2}) \tag{4.70b}$$

hvor

$$A(p,\mu) \equiv 2\frac{(-1)^m C_{p+2}}{\mu''(1)} \equiv 2\frac{(-1)^m C_{2m+3}}{\mu''(1)} \tag{4.71}$$

Som konklusjon kan en uttale:

Sats 4.1. *Metoden (4.2) med orden $p=2m+1$, $m=1$, er absolutt stabil for $z \simeq 0$, $z>0$("om origo") hvis*

$$A(p,\mu) < 0 \tag{4.72}$$

og absolutt ustabil hvis

$$A(p,\mu) > 0 \tag{4.73}$$

hvor A er gitt av (4.71)

Sats 4.2. *Størmers og Cowells metoder er absolutt stabile om origo hvis ordenen $p = 2m+1$, $m \geq 1$, $m \in N$ og*

$$(-1)^m C_{2m+3} < 0 \tag{4.74}$$

Lemma 4.2. *Størmers metode er absolutt stabil om origo for $p = 4\kappa-1$, $\kappa=1,2,3,\ldots$ og absolutt ustabil om origo for $p = 4\kappa+1$, $\kappa=1,2,3,\ldots$*

Bevis: Fra Lemma 4.1 og |1,table 6.6| har en for Størmers metoder:

$$C_{2m+3} = \sigma_{2m+3} > 0 \ , \ m \geq 1$$

Størmers metode er gitt ved:

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j \nabla^j \phi_{n+1} \tag{4.75}$$

Da er ordenen til (4.75) gitt ved $p=k+1$, $k=2m$. Altså absolutt ustabilitet av (4.75) hvis $k=4\kappa(m=2\kappa)$, $\kappa \geq 1$ og absolutt stabilitet hvis $k=4\kappa-2$ $(m=2\kappa-1)$, $\kappa \geq 1$. Q.E.D.

Lemma 4.3. *Cowells metode er absolutt stabil om origo for $k=4\kappa$, $\kappa=1,2,3,\ldots$ og absolutt ustabil for $k=4\kappa+2$, $\kappa=1,2,3,\ldots$*

Bevis: For Cowells metode

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = h^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j^* \nabla^j \phi_{n+2} \tag{4.76}$$

er ordenen $p=k+1$, $C_{p+2}=\sigma_{k+1}^*$.
Fra |1,table 6.6| og Lemma 4.1:

$$C_{p+2} = \sigma_{k+1}^* < 0 \quad , \quad k \geq 3$$

Med $p=2m+1$ er $k=2m$. Siden metoden er banestabil for $k=2$ (Se avsnitt 4.2) og $\sigma_3^*=0$ antar vi at $m=2$. Fra Sats 4.2 har en da at: Cowells metode er absolutt stabil om origo for $k=4\kappa$ ($m=2\kappa$), $\kappa \geq 1$ og absolutt ustabil om origo for $k=4\kappa+2$ ($m=2\kappa+1$) , $\kappa \geq 1$.   Q.E.D.

Anta så at $p=2m$, $m \geq 2$. Går en fram som tidligere får en tilsvarende (4.56):

$$\begin{aligned} &\{(a_1+\nu'(1))f_0 z^2 - a_0 f_1 z\} + \{a_0 f_0 z + (a_1+\nu'(1)) f_1 z^2\} i \\ &+ O(fz^3) + O(f^2)(1+z^2) \\ &\qquad = (-1)^m C_{p+2} z^{p+2} + i(-1)^m C_{p+3} z^{p+3} + O(z^{p+4}) \end{aligned} \tag{4.77}$$

som gir

$$\begin{aligned} z(a_1+\nu'(1))f_0 - a_0 f_1 &= (-1)^m C_{p+2} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \\ a_0 f_0 + (a_1+\nu'(1)) f_1 z &= (-1)^m C_{p+3} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \end{aligned} \tag{4.78}$$

Altså:

$$f_1(z) = \frac{(-1)^{m+1}}{\mu''(1)} C_{p+2} z^{p+1} + O(z^{p+2}) \tag{4.79a}$$

$$= Az^{p+1} + O(z^{p+2}) \tag{4.79b}$$

der

$$A \equiv \frac{(-1)^{m+1}}{\mu''(1)} C_{p+2} \tag{4.80}$$

$$f_0(z) = \frac{(-1)^m}{\mu''(1)} C_{p+3} z^{p+2} + \frac{-A(a_1+\nu'(1))}{\mu''(1)} z^{p+2} + O(z^{p+3}) \tag{4.81a}$$

$$= Bz^{p+2} + O(z^{p+3}) \tag{4.81b}$$

der

$$B \equiv \frac{(-1)^m}{(\mu''(1))^2}\,(\mu''(1)C_{p+3} - \tfrac{1}{3}\mu'''(1)C_{p+2}) \tag{4.82}$$

Nå er:

$$|r|^2 = 1+2(Bz^{p+2}+O(z^{p+3}))(1-\frac{z^2}{2}+O(z^4))$$

$$+2(Az^{p+1}+O(z^{p+2}))(z+O(z^3)) + f_0^2 + f_1^2 \tag{4.83a}$$

$$= 1 + Cz^{p+2} + O(z^{p+3}) \tag{4.83b}$$

der

$$C \equiv 2\{A+B\} = \frac{(-1)^m}{(\mu''(1))^2}\{\mu''(1)C_{p+3}-(\mu''(1)+\tfrac{1}{3}\mu'''(1))C_{p+2}\} \tag{4.84}$$

<u>Korollar 4.1.</u> *Med* $\mu(r) = r^s-2r^{s-1}+r^{s-2}$ *er*

$$\mu''(1) = 2\ ,\ \mu'''(1) = 6(s-2) \tag{4.85}$$

Bevis: $\mu(r) = r^{s-2}(r-1)^2$ (4.86)

$$\mu''(r)=(s-2)(s-3)r^{s-4}(r-1)^2+2(s-2)r^{s-3}2(r-1)+r^{s-2}\cdot 2 \tag{4.87}$$

$$\mu''(1) = 2 \tag{4.88}$$

$$\mu'''(r)=(s-2)(s-3)(s-4)r^{s-5}(r-1)^2+3(s-2)(s-3)r^{s-4}2(r-1)$$

$$+3(s-2)r^{s-3}\cdot 2+r^{s-2}\cdot 0 \tag{4.89}$$

$$\mu'''(1) = 6(s-2) \tag{4.90}$$

Q.E.D.

Dette gir da at:

$$\mu''(1)+\tfrac{1}{3}\mu'''(1) = 2+2s-4 = 2(s-1) \tag{4.91}$$

For Størmers metode (4.75) har vi:

$$p = k+1 \;,\; C_{p+2} = \sigma_{k+1} \;,\; C_{p+3} = \sigma_{k+2} \;,\; k = p-1 = 2m-1 \;,$$

$$s = k+1 = 2m$$

Av (4.91) ($m \geq 2$) følger da:

$$\mu''(1) + \frac{1}{3}\mu'''(1) = 2(2m-1) \tag{4.92}$$

og av (4.84):

$$C = \frac{(-1)^m}{4}\{2\nu_{2m+1} - 2(2m-1)\nu_{2m}\}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2}\{\nu_{2m+1} - (2m-1)\nu_{2m}\} \tag{4.93}$$

<u>Lemma 4.4.</u> *Størmers metode er absolutt stabil om origo dersom $k = 4\kappa-1$, $\kappa \geq 1$ og absolutt ustabil om origo dersom $k = 4\kappa+1$, $\kappa \geq 1$.*

Bevis: $m=2$:

$$C = \frac{1}{2}\{\frac{3}{40} - 3\frac{19}{240}\} = -\frac{13}{160} < 0 \tag{4.94}$$

altså absolutt stabilitet om origo ifølge (4.83b).
Nå sier Lemma 4.1 at:

$$\sigma_j < \sigma_{j-1} \;,\; j \geq 4 \tag{4.95}$$

La så $m = 2\kappa$, $\kappa \geq 1$:

$$C = \frac{1}{2}(\sigma_{4\kappa+1} - (4\kappa-1)\sigma_{4\kappa}) < \frac{1}{2}\sigma_{4\kappa}(2-4\kappa) < 0 \;,\; \kappa \geq 1 \tag{4.96}$$

Altså har en absolutt stabilitet om origo for $m=2\kappa$, $\kappa \geq 1$.
Setter så $m = 2\kappa+1$, $\kappa \geq 1$:

$$C = -\frac{1}{2}(\sigma_{4\kappa+3} - (4\ \ +1)\sigma_{4\kappa+2} > \frac{1}{2}\sigma_{4\kappa+2}(4\kappa+1-1) = 2\kappa\sigma_{4\kappa+2} > 0 \tag{4.97}$$

Altså absolutt ustabilitet om origo for $m = 2\kappa+1$, $\kappa \geq 1$.

Q.E.D.

Lemma 4.2 og 4.4 kan da oppsummeres slik:

Sats 4.3. *Størmers metode (4.75) er*

i) absolutt stabil om origo når $k = 4\kappa-2, 4\kappa-1, \kappa\varepsilon N, \kappa\geq 1$
ii) absolutt ustabil om origo når $k = 4\kappa, 4\kappa+1, \kappa\varepsilon N, \kappa\geq 1$

For Cowells metode (4.76) har vi $p=k+1$, $C_{p+2}=\sigma^*_{k+1}, C_{p+3}=\sigma^*_{k+2}$.
Med $k=2m-1$:

$$C_{p+2} = \sigma^*_{2m} \ , \ C_{p+3} = \sigma^*_{2m+1}$$

Av (4.91):

$$\mu''(1) + \frac{1}{3}\mu'''(1) = 4(m-1) \tag{4.98}$$

Fra (4.84) følger da:

$$C = \frac{(-1)^m}{4}(2\sigma^*_{2m+1}-4(m-1)\sigma^*_{2m})$$
$$= \frac{(-1)^m}{2}(\sigma^*_{2m+1}-2(m-1)\sigma^*_{2m}) \tag{4.99}$$

Lemma 4.5. *Cowells metode (4.76) er absolutt stabil om origo for* $k = 4\kappa+1$, $\kappa\geq 1$ *og absolutt ustabil om origo for* $k = 4\kappa-1$, $\kappa\geq 1$.

Bevis: Ifølge Lemma 4.1 er

$$\sigma^*_j < 0 \ , \ j\geq 4 \quad \text{og} \quad \sigma^*_j < \sigma^*_{j+1} \ , \ j\geq 5$$

La $m = 2\kappa$, $\kappa\geq 2$ (da $\mu'''(1)=0$ for $\kappa=1$).
(4.99)gir da:

$$C = \frac{1}{2}(\sigma^*_{2m+1}-2(m-1)\sigma^*_{2m}) > \frac{1}{2}\sigma^*_{2m}(1-2m+2) = \frac{3-2m}{2}\sigma^*_{2m} > 0 \tag{4.100}$$

Med $m=2\kappa+1, \kappa\geq 1$:

$$C = \frac{1}{2}(2(m-1)\sigma^*_{2m}-\sigma^*_{2m+1}) < \frac{1}{2}\sigma^*_{2m+1}(2m-2-1) = \frac{2m-3}{2}\sigma^*_{2m+1} < 0 \tag{4.101}$$

Q.E.D.

Lemma 4.3 og 4.5 gir totalt:

Sats 4.4. *Cowells metode (4.76) er*

i) absolutt stabil om origo når $k = 4\kappa+1, 4\kappa$, $\kappa \geq 1$
ii) absolutt ustabil om origo når $k = 4\kappa+2, 4\kappa+3$, $\kappa \geq 1$.

La oss så finne for hvilke reelle $z^2>0$ røttene r til (4.3) ligger på enhetssirkelen. ($r = e^{i\theta}$, $\theta \in [0,2\pi)$).
Altså:

$$\mu(e^{i\theta}) + z^2 \cdot \nu(e^{i\theta}) = 0 \tag{4.102}$$

Da gjelder for $\nu(e^{i\theta}) \neq 0$ og for $\theta \in [0,2\pi)$:

$$z^2 = f(\theta) \equiv - \frac{\mu(e^{i\theta})}{\nu(e^{i\theta})} \tag{4.103}$$

La oss først behandle Størmers metode (4.75).
For denne er:

$$f(\theta) = - \left. \frac{r(1-r^{-1})^2}{\sum\limits_{j=0}^{k} \sigma_j (1-r^{-1})^k} \right|_{r=e^{i\theta}} \tag{4.104}$$

Setter:

$$1-e^{-i\theta} = a(\psi)e^{i\psi} \quad , \quad 0 \leq a \leq 2 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad , \text{ a reell} \tag{4.105}$$

Herav:

$$e^{-i\theta} = 1-ae^{i\psi} \tag{4.106}$$

Multipliserer begge sider av likningen med respektives kompleks-konjugerte:

$$e^{-i\theta} \cdot e^{i\theta} = (1-ae^{i\psi})(1-ae^{-i\psi}) \tag{4.107a}$$

$$= 1-2a\cos\psi+a^2 \tag{4.107b}$$

Vi ser da at:

$$a(\psi) = 2\cos\psi \tag{4.108}$$

Teller i $f(\theta)$:

$$r(1-r^{-1})^2 = (r-1)(1-r^{-1})$$

Innsatt $r = e^{i\theta}$:

$$(e^{i\theta}-1)(1-e^{-i\theta}) = (1-ae^{-i\psi}-1)ae^{i\psi} \tag{4.109a}$$

$$= -a^2 \tag{4.109b}$$

$$= -4\cos^2\psi \tag{4.109c}$$

Herav:

$$f_k(\theta(\psi)) = \frac{4\cos^2\psi}{\sum_{j=0}^{k} \sigma_j a^j e^{i(j\psi)}} \tag{4.110}$$

$$\equiv \frac{4\cos^2\psi}{R_k(\psi)+iI_k(\psi)} \tag{4.111}$$

hvor

$$I_k(\psi) \equiv \sum_{j=1}^{k} \sigma_j a^j \sin(j\psi) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j 2^j (\cos\psi)^j \sin(j\psi) \tag{4.112}$$

$$R_k(\psi) \equiv \sum_{j=0}^{k} \sigma_j a^j \cos(j\psi) = \sum_{j=0}^{k} \sigma_j 2^j (\cos\psi)^j \cos(j\psi) \tag{4.113}$$

Innfører nå Tchebychevpolynomer av første og andre slag:

$$U_j(x) \equiv \frac{\sin(j\psi)}{\sin\psi} \tag{4.114}$$

$$T_j(x) \equiv \cos(j\psi) \tag{4.115}$$

der $\psi \equiv \arccos x$.

Siden vi bare behøver å betrakte $\psi \in [0,\frac{\pi}{2}]$ er $x \in [0,1]$.

Følgende funksjoner defineres:

$$\hat{I}_k(x) \equiv I_k(\arccos x) \qquad (4.116)$$

$$\equiv \sqrt{1-x^2}\,\tilde{I}_k(x) \qquad (4.117)$$

$$\hat{R}_k(x) \equiv R_k(\arccos x) \qquad (4.118)$$

Fra (4.112) og (4.113) følger da:

$$\tilde{I}_k(x) = \sum_{j=1}^{k} 2^j \sigma_j x^j U_j(x) \qquad (4.119)$$

$$\hat{R}_k(x) = \sum_{j=0}^{k} 2^j \sigma_j x^j T_j(x) \qquad (4.120)$$

Utregnet:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2(x) &= \tfrac{2}{3}x^3 \\
\tilde{I}_3(x) &= \tfrac{8}{3}x^5 \\
\tilde{I}_4(x) &= \tfrac{4}{15}x^5(38x^2-9) \\
\tilde{I}_5(x) &= \tfrac{8}{15}x^7(72x^2-35) \\
\hat{R}_2(x) &= 1-\tfrac{1}{3}x^2+\tfrac{2}{3}x^4 \\
\hat{R}_3(x) &= 1-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{4}{3}x^4+\tfrac{8}{3}x^6 \\
\hat{R}_4(x) &= 1-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{15}x^4-\tfrac{112}{15}x^6+\tfrac{152}{15}x^8 \\
\hat{R}_5(x) &= 1-\tfrac{1}{3}x^2-\tfrac{1}{15}x^4+\tfrac{68}{15}x^6-\tfrac{568}{15}x^8+\tfrac{576}{15}x^{10}
\end{aligned} \qquad (4.121)$$

For $f(\theta)$ har vi tilsvarende:

$$\hat{f}_k(x) \equiv f_k(\arccos x) \qquad (4.122)$$

$$= \frac{4x^2}{\hat{R}_k(x)+i\hat{I}_k(x)} \qquad (4.123)$$

Ønsker nå å finne de $x_0 \in [0,1]$ som gir

$$\hat{I}_k(x_0) = 0 \tag{4.124}$$

De reelle og positive z^2-verdiene som er slik at røttene til (4.3) for Størmers metode ligger på enhetssirkelen er da gitt ved:

$$\hat{f}_k(x_0) = \frac{4x_0^2}{\hat{R}_k(x_0)} \tag{4.125}$$

Utregnet:

k=2,3 gir bare $x_0=1$ med $\hat{f}_2(1)=3$ og $\hat{f}_3(1)=2$.

k=4 gir $x_0=1$ og $x_0=\frac{9}{38}$ med

$\hat{f}_4(1) = \frac{60}{49}$ og $\hat{f}_4(\frac{9}{38}) = \frac{2469240}{2215457}$.

Numeriske resultater for $k \in [2,9]$ foreligger i tabell 4.1.

Fra sats 4.3 vet vi nå at Størmers metode med k=2,3,6,7 er absolutt stabil om origo og fra tabell 4.1 at stabilitetsintervallene i de fire tilfellene er henholdsvis

(0,3), (0,2), (0,0.39204) og (0,0.21094).

Tilsvarende vet vi at Størmers metode for k=4,5,8,9 er absolutt ustabil om origo i intervallene

(0,1.1146), (0,0.70588), (0,0.11195) og (0,0.058774).

For å finne alle absolutte stabilitetsintervallene kan en beregne røttene til (4.3) for ulike z^2 innenfor de forskjellige intervallene som tabell 4.1 gir. Resultatet av en slik undersøkelse foreligger i tabell 4.2.

Tabell 4.1. Nullpunkter x_0 for $I_k(x)$ og tilhørende verdi av $z^2 = f_k(x_0)$, $k = 2(1)9$.

k	2	3	4	5	6	7	8	9
x_0	1	1	1	1	1	1	1	1
$f_k(x_0)$	3	2	1.2245	0.70588	0.39090	0.21094	0.11195	0.058774
			0.23684	0.48611	0.092706	0.24512	0.38362	0.49548
			1.1146	7.1795	0.38204	1.0054	1.11772	0.72493
					0.64449	0.74337	0.048632	0.14450
					-2.0892	-0.62812	0.19777	0.61075
							0.80741	0.85069
							-0.25951	-0.11771

Tabell 4.2. Absolutte stabilitetsintervaller for Størmers metode når $k = 2(1)9$. *) Noen av intervallene som framgår av tabell 4.1 er ganske små. Det tas derfor forbehold i disse tilfelle mot at numeriske feil har gitt feil konklusjon angående stabilitet eller ikke i intervaller som ikke grenser til origo.

k	Abs. stab.intervall
2	(0,3)
3	(0,2)
4	(1.1146,1.2245)
5	Ustabil
6	(0,0.38204) *)
7	(0,0.21094)
8	Ustabil *)
9	Ustabil *)

La oss så betrakte Cowells metode.

I dette tilfelle er:

$$f_k(\theta) = - \left. \frac{(1-r^{-1})^2}{\sum_{j=0}^{k} \sigma_j^*(1-r^{-1})^j} \right|_{r=e^{i\theta}} \tag{4.126a}$$

$$= \left. \frac{r^{-1}\cdot 4\cos^2\psi}{\sum_{j=0}^{k} \sigma_j^*(1-r^{-1})^j} \right|_{r=e^{i\theta}} \tag{4.126b}$$

Fra (4.106):

$$r = e^{i\theta} = 1-a\cos\psi+a\sin\psi\cdot i \tag{4.127}$$

$$= 1-2\cos^2\psi+2\cos\psi\sin\psi\cdot i \tag{4.128}$$

Herav:

$$f_k(\theta) \equiv \frac{4\cos^2\psi}{(1-2\cos^2\psi+2\cos\psi\sin\psi\cdot i)(R_k^*(\psi)+iI_k^*(\psi))} \tag{4.129a}$$

$$\equiv \frac{4\cos^2\psi}{U_k(\psi)+iV_k(\psi)} \tag{4.129b}$$

hvor

$$U_k(\psi) \equiv (1-2\cos^2\psi)R_k^*(\psi)-2\cos\psi\sin\psi I_k^*(\psi) \tag{4.130}$$

$$V_k(\psi) \equiv (1-2\cos^2\psi)I_k^*(\psi)+2\cos\psi\sin\psi R_k^*(\psi) \tag{4.131}$$

og $R_k^*(\psi)$ og $I_k^*(\psi)$ er definert analogt til $R_k(\psi)$ og $I_k(\psi)$ i (4.113) og (4.112).

Innfører Tchebyshevpolynomer igjen:

$$\hat{U}_k(x) \equiv U_k(\arccos x) \tag{4.132}$$

$$= (1-2x^2)\hat{R}_k^*(x)-2x(1-x^2)\tilde{I}_k^*(x) \tag{4.133}$$

$$\hat{V}_k(x) \equiv V_k(\arccos x) \tag{4.134}$$

Utregnet:

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_2(x) &= \tilde{V}_3(x) = 0 \\
\tilde{V}_4(x) &= \frac{2}{15}x^5 \\
\tilde{V}_5(x) &= \frac{8}{15}x^7 \\
\tilde{V}_6(x) &= \frac{4x^7}{945}(442x^2-95) \\
\hat{U}_2(x) &= \hat{U}_3(x) = 1-\frac{x^2}{3} \\
\hat{U}_4(x) &= 1-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{15}+\frac{2}{15}x^6 \\
\hat{U}_5(x) &= 1-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{15}-\frac{4}{15}x^6+\frac{8}{15}x^8 \\
\hat{U}_6(x) &= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{15}-\frac{31}{945}x^6-\frac{1264}{945}x^8+\frac{1768}{945}x^{10}
\end{aligned}
\tag{4.137}
$$

Definerer nå x_0 slik at:

$$\hat{V}_k(x_0) = 0 \tag{4.138}$$

Da er

$$\hat{f}_k(x_0) = \frac{4x_0^2}{\hat{U}_k(x_0)} \tag{4.139}$$

Løsningen av (4.138) (en eller flere x_0) og denne(disse) innsatt i (4.139) foreligger i tabell 4.3, k=2(1)6. I tabell 4.4 er angitt de absolutte stabilitetsintervallene når k=4,5,6.

Tabell 4.3. Nullpunkter x_0 for $\hat{V}_k(x)$ og tilsvarende verdier av $z^2 = \hat{f}_k(x_0)$, k=2(1)6.

k	2	3	4	5	6
x_0	1	1	1	1	1
$\hat{f}_k(x_0)$	6	6	$\frac{60}{11}$	$\frac{60}{13}$	$\frac{945}{260}$
					$\sqrt{\frac{95}{442}}$ 0.92295

Tabell 4.4. Absolutte stabilitetsintervaller for Cowells metode når k=4(1)6. For k=2,3 er metoden banestabil.

k	Abs.stab.intervall
4	(0,5.45455)
5	(0,4.61538)
6	(0.92295,3.6346)

4.2. Numerisk undersøkelse av absolutte stabilitetsområder for Størmers og Cowells metoder.

Den teori som er presentert i avsnitt 4.1 ble utledet som følge av endel overraskende resultater ved undersøkelse av stabilitetskurver for Størmers og Cowells metoder. Særlig oppdagelsen av at Størmers metode med k=5 er absolutt ustabil for alle skrittlengder h, bidrog til dette. Også resultatet at ikke alle metodene var absolutt stabile for små nok h, var uventet når en kjenner teorien for flerskrittsmetoder for løsning av 1. ordens likninger. Vi vil i det følgende oppsummere de numeriske undersøkelser som ble gjort.

Med en stabilitetskurve til en numerisk metode av typen:

$$\mu(E)u_n = h^2\nu(E)\phi_n \tag{4.140}$$

vil vi mene avbildningen av enhetssirkelen i r-planet inn i z^2-planet hvor

$$z^2(r) = -\frac{\mu(r)}{\nu(r)} . \tag{4.141}$$

(4.141) fås ved anvendelse av testproblemet

$$y'' = -\lambda^2 y \tag{4.142}$$

på (4.140) når $z^2 = h^2\lambda^2$. (4.142) har for reelle λ periodisk løsning. Når den eksakte løsning er begrenset, kan vi ikke tillate at metoden til numerisk løsning av problemet er ustabil. Den numeriske løsning av (4.142) er begrenset hvis $|r| \leq 1$. Ved løsningen er det derfor nødvendig å velge h slik at z^2 ligger i et stabilt intervall begrenset av en slik stabilitetskurve.

Fra (4.40) og (4.41) har en:

Størmers metode:

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = h^2\sum_{j=0}^{k}\sigma_j\nabla^j\phi_{n+1} \tag{4.143}$$

Cowells metode:

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = h^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j^* \nabla^j \phi_{n+2} \tag{4.144}$$

Fra (4.141) fås nå idet $\nabla \equiv 1-E^{-1}$:

$$z^2_{k,\text{Størmer}} = -\frac{(r-1)^2}{r\sum_{j=0}^{k}\sigma_j(1-r^{-1})^j} \tag{4.145}$$

og

$$z^2_{k,\text{Cowell}} = -\frac{(r-1)^2}{r^2\sum_{j=0}^{k}\sigma_j^*(1-r^{-1})^j} \tag{4.146}$$

(Jfr. tabell 4.5 og 4.6.)
Setter $r = e^{i\theta}$ og lar θ anta alle verdier på et gitter $\{\frac{2\pi j}{n}\}_{j=0}^{n-1}$.

Beregner så $z^2_{k,n,j} = z^2_k(e^{i\frac{2\pi j}{n}})$, $j=0(1)n-1$.

Disse z^2-verdiene er beregnet numerisk og plottet inn i figurene 4.1-9 for $k=0(1)6$ bortsett fra i tilfelle hvor metoden er banestabil.

Stabilitetskurven skjærer den reelle akse i ett eller flere punkter slik at den reelle akse deles opp i ett eller flere intervaller. For hvert av disse intervaller velges en (reell) z^2-verdi, og en finner tilsvarende røtter r numerisk fra (4.145) eller (4.146). Hvis absoluttverdien av alle røttene er mindre enn 1, er intervallet absolutt stabilt, ellers absolutt ustabilt. Resultatet av denne undersøkelsen er angitt i de samme figurer. Det er forøvrig full overensstemmelse mellom disse figurene og teorien fra avsnitt 4.1.

Som en ekstra kontroll av noen av resultatene ble $y'' = -\lambda^2 y$ integrert med Størmers metode, $k=4$ og 5 og med Cowells metode, $k=6$. Det ble brukt skritt $h=1$ og $z^2(=\lambda^2)$ ble valgt lik ett punkt innenfor de ulike intervaller. Som "startmetode" ble brukt den kjente analytiske løsning, og ca. 1000 skritt ble tatt. Utfallet av denne testen underbygger de tidligere refererte resultater. Se vedlegg 1.

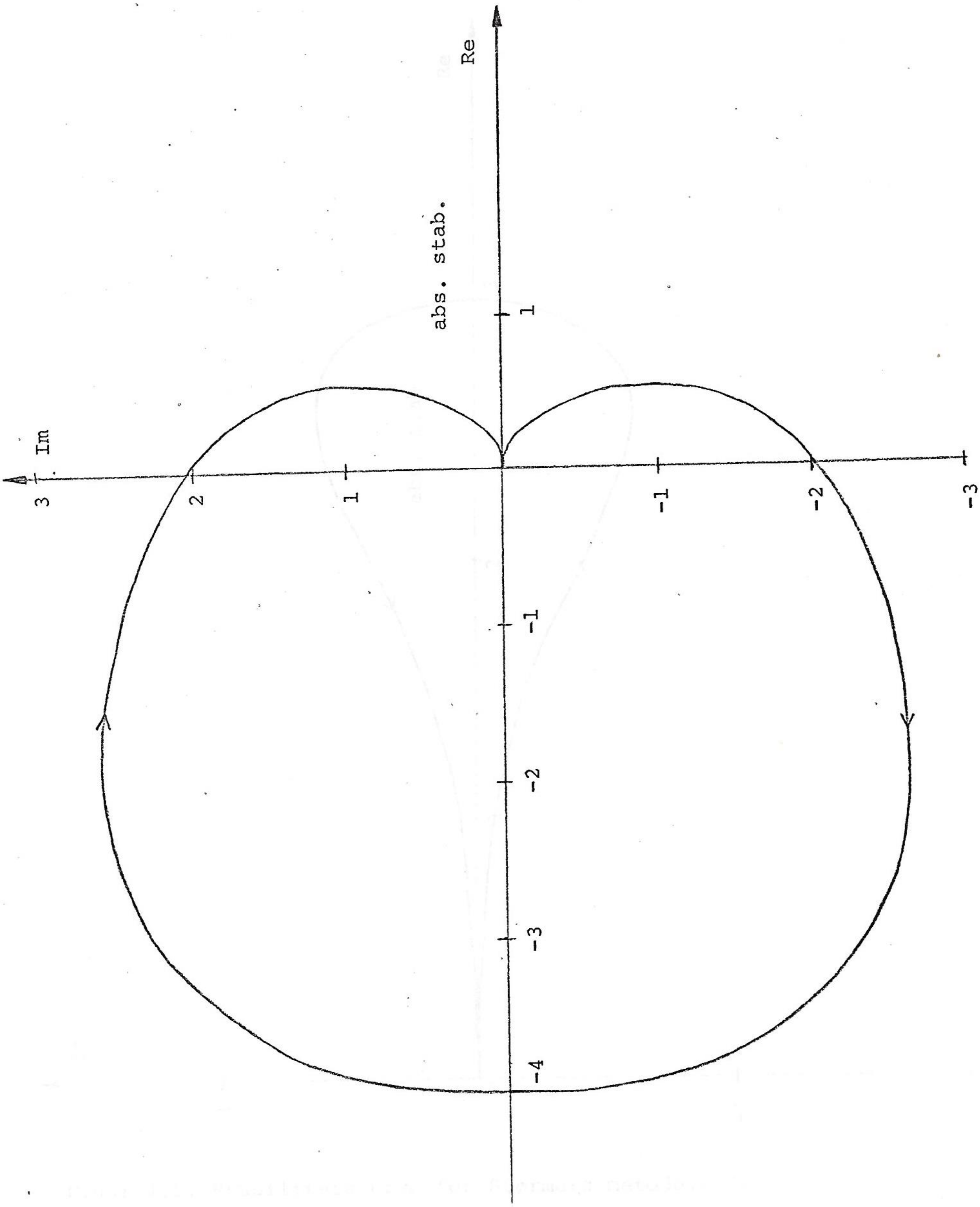
Forklaring til stabilitetskurvene i figurene 4.1-9: Områdene med absolutt stabilitet er angitt med "abs. stab.". De stedene hvor kurvene skjærer den reelle akse med liten vinkel-

Tabell 4.5. $z^2_{k,\text{Størmer}}(r)$, k=0(1)6.

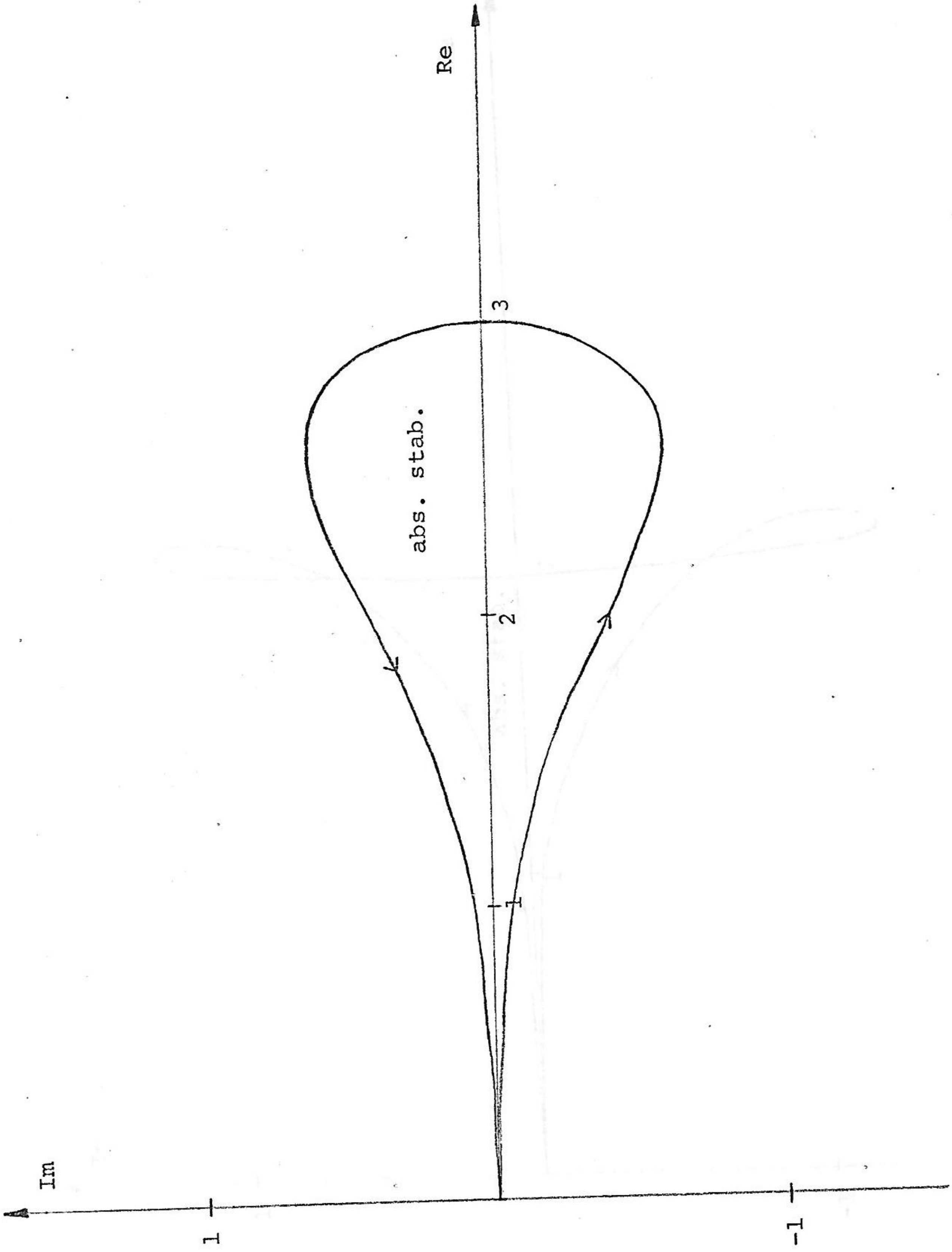
k	$z^2_{k,\text{Størmer}}(r)$
0	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
1	$-\frac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\frac{12r(r-1)^2}{13r^2-2r+1}$
3	$-\frac{12r^2(r-1)^2}{14r^3-5r^2+4r-1}$
4	$-\frac{240r^3(r-1)^2}{299r^4-176r^3+194r^2-96r+19}$
5	$-\frac{240r^4(r-1)^2}{317r^5-266r^4+374r^3-276r^2+109r-18}$
6	$-\frac{60480r^5(r-1)^2}{84199r^6-92922r^5+158973r^4-155852r^3+92193r^2-30426r+4315}$

Tabell 4.6. $z^2_{k,\text{Cowell}}(r)$, k=0(1)6.

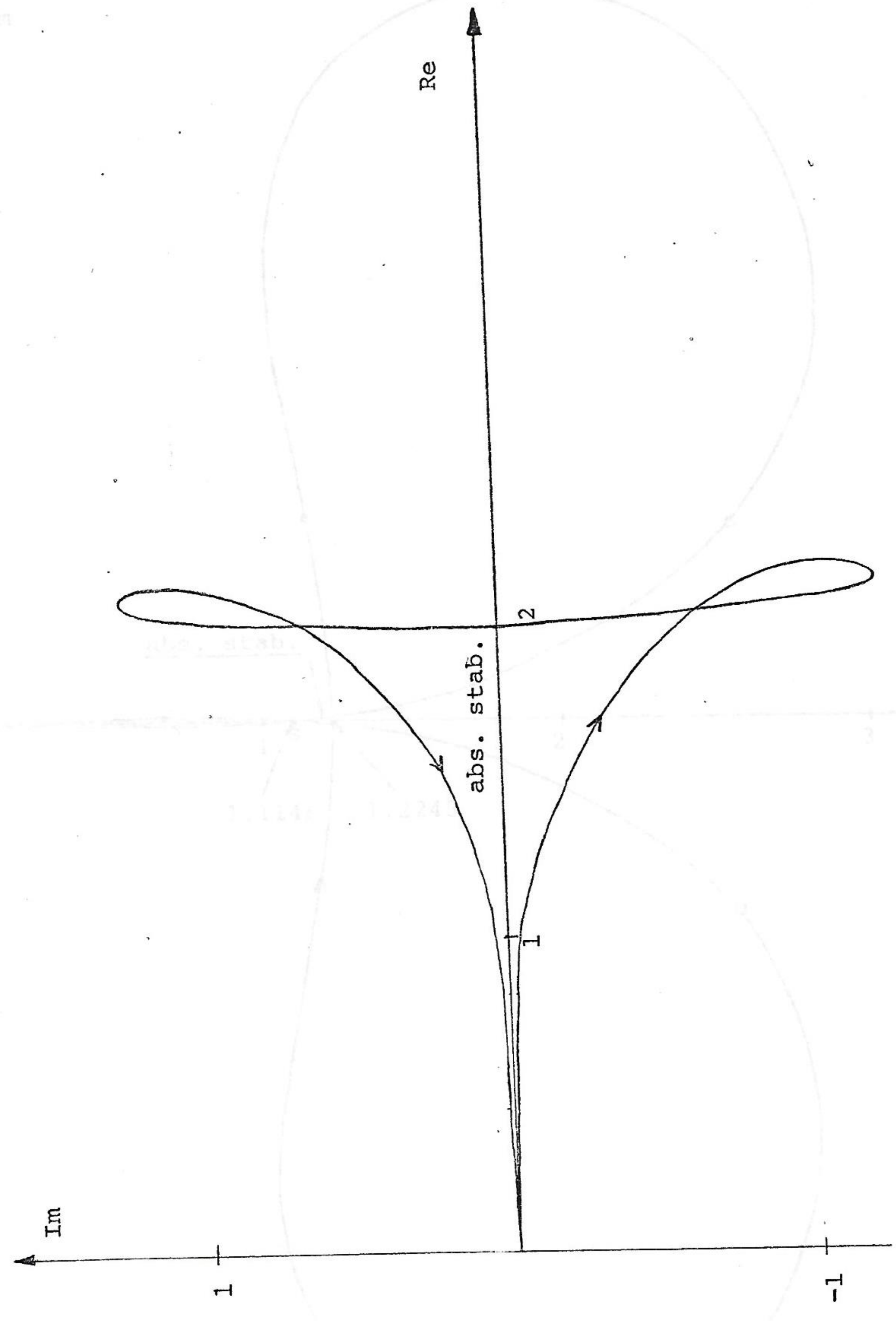
k	$z^2_{k,\text{Cowell}}(r)$
0	$-\dfrac{(r-1)^2}{r^2}$
1	$-\dfrac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\dfrac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
3	$-\dfrac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
4	$-\dfrac{240r^2(r-1)^2}{19r^4+204r^3+14r^2+4r-1}$
5	$-\dfrac{240r^3(r-1)^2}{18r^5+209r^4+4r^3+14r^2-6r+1}$
6	$-\dfrac{60480r^4(r-1)^2}{4315r^6+53994r^5-2307r^4+7948r^3-4827r^2+1578r-221}$



Figur 4.1. Stabilitetskurve for Cowells metode,k=0.



Figur 4.2. Stabilitetskurve for Størmers metode,k=2.



Figur 4.3. Stabilitetskurve for Størmers metode,k=3.

La oss så betrakte Cowells metode.
I dette tilfelle er:

$$f_k(\theta) = - \left. \frac{(1-r^{-1})^2}{\sum_{j=0}^{k} \sigma_j^*(1-r^{-1})^j} \right|_{r=e^{i\theta}} \tag{4.126a}$$

$$= \left. \frac{r^{-1}\cdot 4\cos^2\psi}{\sum_{j=0}^{k} \sigma_j^*(1-r^{-1})^j} \right|_{r=e^{i\theta}} \tag{4.126b}$$

Fra (4.106):

$$r = e^{i\theta} = 1-a\cos\psi+a\sin\psi\cdot i \tag{4.127}$$

$$= 1-2\cos^2\psi+2\cos\psi\sin\psi\cdot i \tag{4.128}$$

Herav:

$$f_k(\theta) \equiv \frac{4\cos^2\psi}{(1-2\cos^2\psi+2\cos\psi\sin\psi\cdot i)(R_k^*(\psi)+iI_k^*(\psi))} \tag{4.129a}$$

$$\equiv \frac{4\cos^2\psi}{U_k(\psi)+iV_k(\psi)} \tag{4.129b}$$

hvor

$$U_k(\psi) \equiv (1-2\cos^2\psi)R_k^*(\psi)-2\cos\psi\sin\psi I_k^*(\psi) \tag{4.130}$$

$$V_k(\psi) \equiv (1-2\cos^2\psi)I_k^*(\psi)+2\cos\psi\sin\psi R_k^*(\psi) \tag{4.131}$$

og $R_k^*(\psi)$ og $I_k^*(\psi)$ er definert analogt til $R_k(\psi)$ og $I_k(\psi)$ i (4.113) og (4.112).

Innfører Tchebyshevpolynomer igjen:

$$\hat{U}_k(x) \equiv U_k(\arccos x) \tag{4.132}$$

$$= (1-2x^2)\hat{R}_k^*(x)-2x(1-x^2)\tilde{I}_k^*(x) \tag{4.133}$$

$$\hat{V}_k(x) \equiv V_k(\arccos x) \tag{4.134}$$

$$\equiv \sqrt{1-x^2}\,\tilde{V}_k(x) \tag{4.135}$$

Utregnet:

$$
\begin{aligned}
\tilde{V}_2(x) &= \tilde{V}_3(x) = 0 \\
\tilde{V}_4(x) &= \frac{2}{15}x^5 \\
\tilde{V}_5(x) &= \frac{8}{15}x^7 \\
\tilde{V}_6(x) &= \frac{4x^7}{945}(442x^2-95) \\
\hat{U}_2(x) &= \hat{U}_3(x) = 1-\frac{x^2}{3} \\
\hat{U}_4(x) &= 1-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{15}+\frac{2}{15}x^6 \\
\hat{U}_5(x) &= 1-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{15}-\frac{4}{15}x^6+\frac{8}{15}x^8 \\
\hat{U}_6(x) &= 1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{15}-\frac{31}{945}x^6-\frac{1264}{945}x^8+\frac{1768}{945}x^{10}
\end{aligned}
\tag{4.137}
$$

Definerer nå x_0 slik at:

$$\hat{V}_k(x_0) = 0 \tag{4.138}$$

Da er

$$\hat{f}_k(x_0) = \frac{4x_0^2}{\hat{U}_k(x_0)} \tag{4.139}$$

Løsningen av (4.138) (en eller flere x_0) og denne(disse) innsatt i (4.139) foreligger i tabell 4.3, k=2(1)6. I tabell 4.4 er angitt de absolutte stabilitetsintervallene når k=4,5,6.

Tabell 4.3. Nullpunkter x_0 for $\hat{V}_k(x)$ og tilsvarende verdier av $z^2 = \hat{f}_k(x_0)$, k=2(1)6.

k	2	3	4	5	6
x_0	1	1	1	1	1
$\hat{f}_k(x_0)$	6	6	$\frac{60}{11}$	$\frac{60}{13}$	$\frac{945}{260}$
					$\sqrt{\frac{95}{442}}$
					0.92295

Tabell 4.4. Absolutte stabilitetsintervaller for Cowells metode når k=4(1)6. For k=2,3 er metoden banestabil.

k	Abs.stab.intervall
4	(0,5.45455)
5	(0,4.61538)
6	(0.92295,3.6346)

4.2. Numerisk undersøkelse av absolutte stabilitetsområder for Størmers og Cowells metoder.

Den teori som er presentert i avsnitt 4.1 ble utledet som følge av endel overraskende resultater ved undersøkelse av stabilitetskurver for Størmers og Cowells metoder. Særlig oppdagelsen av at Størmers metode med k=5 er absolutt ustabil for alle skrittlengder h, bidrog til dette. Også resultatet at ikke alle metodene var absolutt stabile for små nok h, var uventet når en kjenner teorien for flerskrittsmetoder for løsning av 1. ordens likninger. Vi vil i det følgende oppsummere de numeriske undersøkelser som ble gjort.

Med en stabilitetskurve til en numerisk metode av typen:

$$\mu(E)u_n = h^2\nu(E)\phi_n \tag{4.140}$$

vil vi mene avbildningen av enhetssirkelen i r-planet inn i z^2-planet hvor

$$z^2(r) = -\frac{\mu(r)}{\nu(r)}\,. \tag{4.141}$$

(4.141) fås ved anvendelse av testproblemet

$$y'' = -\lambda^2 y \tag{4.142}$$

på (4.140) når $z^2 = h^2\lambda^2$. (4.142) har for reelle λ periodisk løsning. Når den eksakte løsning er begrenset, kan vi ikke tillate at metoden til numerisk løsning av problemet er ustabil. Den numeriske løsning av (4.142) er begrenset hvis $|r| \leq 1$. Ved løsningen er det derfor nødvendig å velge h slik at z^2 ligger i et stabilt intervall begrenset av en slik stabilitetskurve.

Fra (4.40) og (4.41) har en:

Størmers metode:

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = h^2\sum_{j=0}^{k}\sigma_j\nabla^j\phi_{n+1} \tag{4.143}$$

Cowells metode:

$$u_{n+2}-2u_{n+1}+u_n = h^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j^* \nabla^j \phi_{n+2} \qquad (4.144)$$

Fra (4.141) fås nå idet $\nabla \equiv 1-E^{-1}$:

$$z^2_{k,\text{Størmer}} = - \frac{(r-1)^2}{r \sum_{j=0}^{k} \sigma_j (1-r^{-1})^j} \qquad (4.145)$$

og

$$z^2_{k,\text{Cowell}} = - \frac{(r-1)^2}{r^2 \sum_{j=0}^{k} \sigma_j^* (1-r^{-1})^j} \qquad (4.146)$$

(Jfr. tabell 4.5 og 4.6.)
Setter $r = e^{i\theta}$ og lar θ anta alle verdier på et gitter $\{\frac{2\pi j}{n}\}_{j=0}^{n-1}$.

Beregner så $z^2_{k,n,j} = z^2_k(e^{i\frac{2\pi j}{n}})$, $j=0(1)n-1$.
Disse z^2-verdiene er beregnet numerisk og plottet inn i figurene 4.1-9 for $k=0(1)6$ bortsett fra i tilfelle hvor metoden er banestabil.

Stabilitetskurven skjærer den reelle akse i ett eller flere punkter slik at den reelle akse deles opp i ett eller flere intervaller. For hvert av disse intervaller velges en (reell) z^2-verdi, og en finner tilsvarende røtter r numerisk fra (4.145) eller (4.146). Hvis absoluttverdien av alle røttene er mindre enn 1, er intervallet absolutt stabilt, ellers absolutt ustabilt. Resultatet av denne undersøkelsen er angitt i de samme figurer. Det er forøvrig full overensstemmelse mellom disse figurene og teorien fra avsnitt 4.1.

Som en ekstra kontroll av noen av resultatene ble $y'' = -\lambda^2 y$ integrert med Størmers metode, k=4 og 5 og med Cowells metode, k=6. Det ble brukt skritt h=1 og $z^2(=\lambda^2)$ ble valgt lik ett punkt innenfor de ulike intervaller. Som "startmetode" ble brukt den kjente analytiske løsning, og ca. 1000 skritt ble tatt. Utfallet av denne testen underbygger de tidligere refererte resultater. Se vedlegg 1.

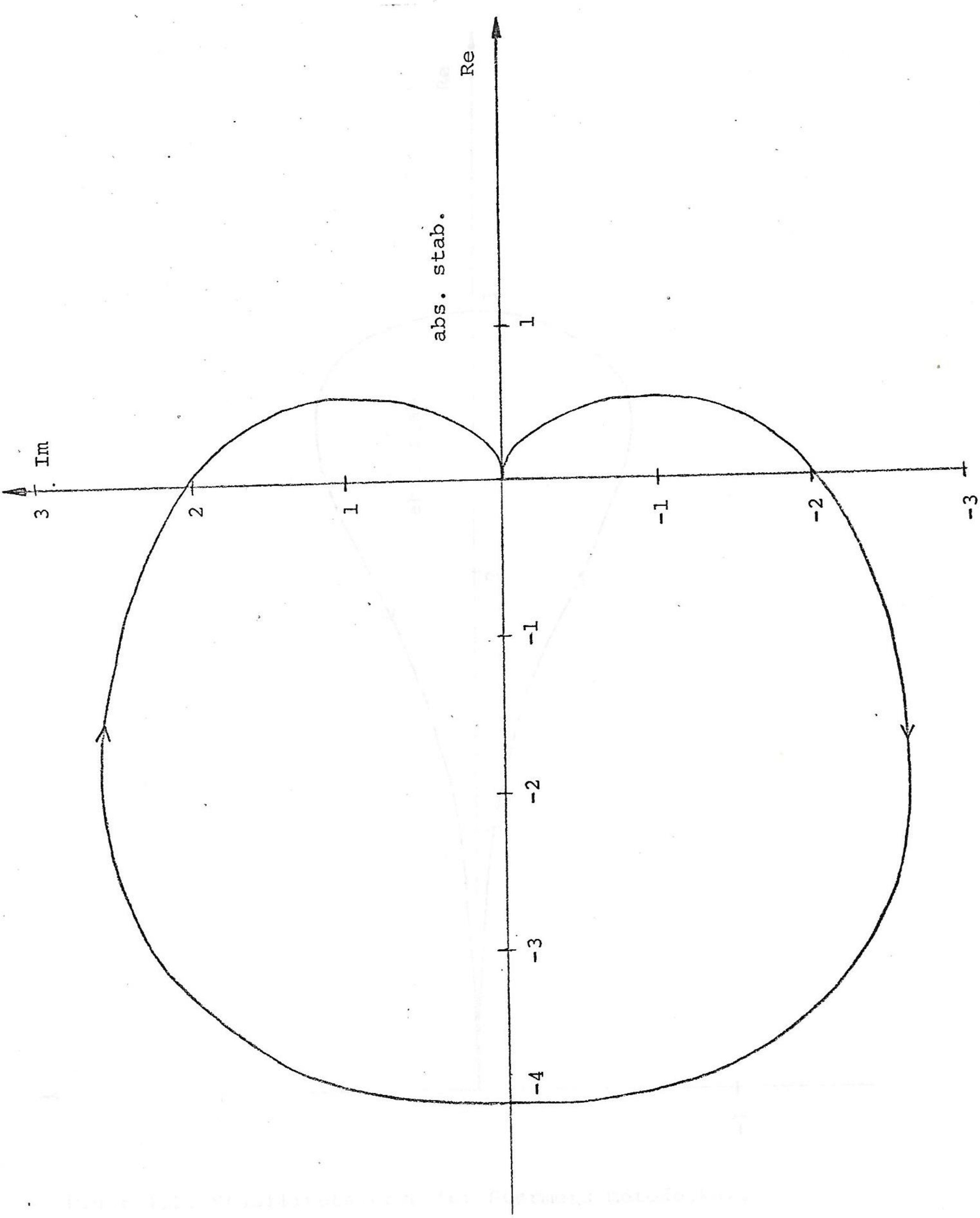
Forklaring til stabilitetskurvene i figurene 4.1-9: Områdene med absolutt stabilitet er angitt med "abs. stab.". De steder hvor kurvene skjærer den reelle akse med liten vinkelkoeffisient er markert med "s". Pilene på kurvene svarer til positiv dreieretning for enhetssirkelen i r-planet.

Tabell 4.5. $z^2_{k,\text{Størmer}}(r)$, $k=0(1)6$.

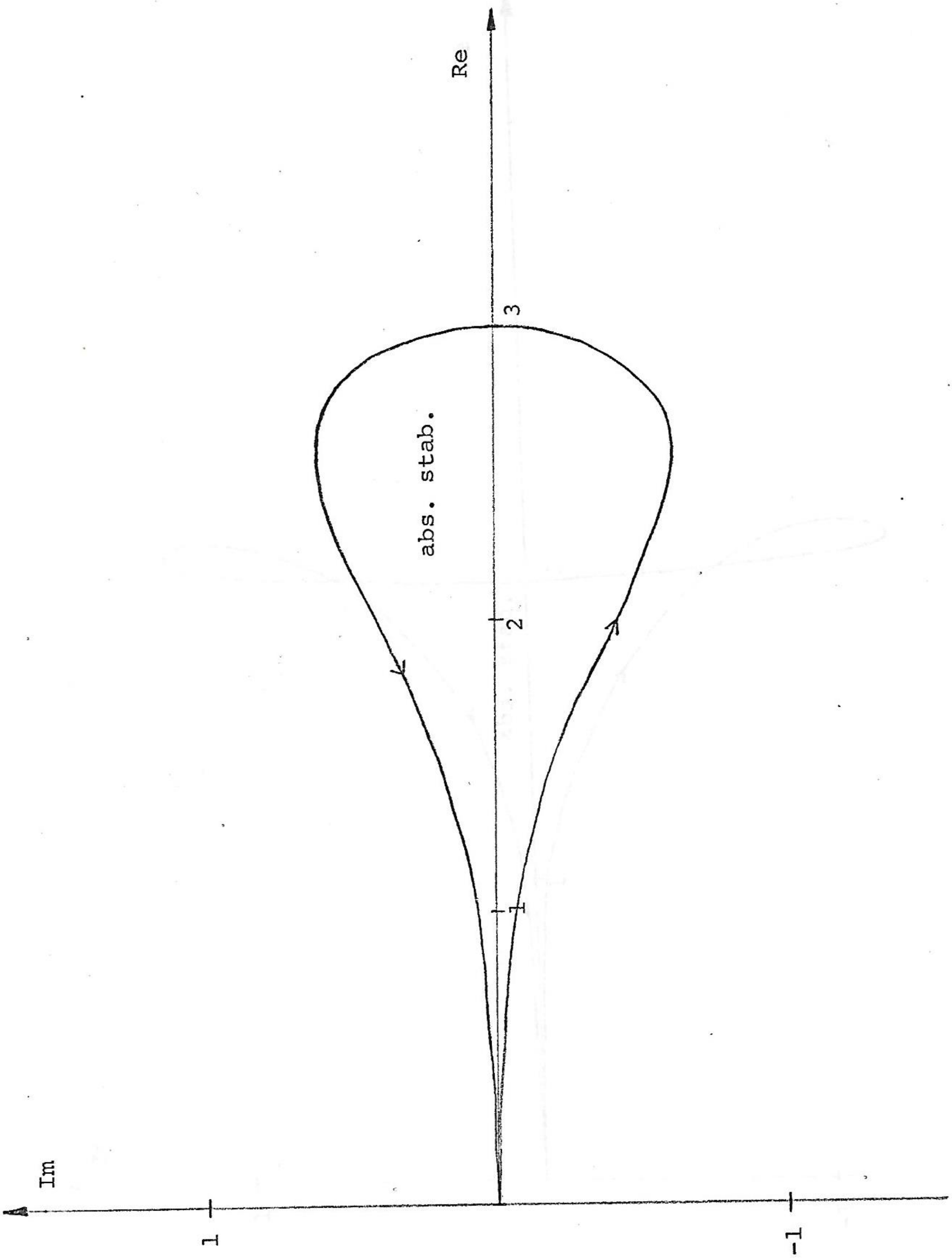
k	$z^2_{k,\text{Størmer}}(r)$
0	$-\dfrac{(r-1)^2}{r}$
1	$-\dfrac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\dfrac{12r(r-1)^2}{13r^2-2r+1}$
3	$-\dfrac{12r^2(r-1)^2}{14r^3-5r^2+4r-1}$
4	$-\dfrac{240r^3(r-1)^2}{299r^4-176r^3+194r^2-96r+19}$
5	$-\dfrac{240r^4(r-1)^2}{317r^5-266r^4+374r^3-276r^2+109r-18}$
6	$-\dfrac{60480r^5(r-1)^2}{84199r^6-92922r^5+158973r^4-155852r^3+92193r^2-30426r+4315}$

Tabell 4.6. $z^2_{k,\mathrm{Cowell}}(r)$, k=0(1)6.

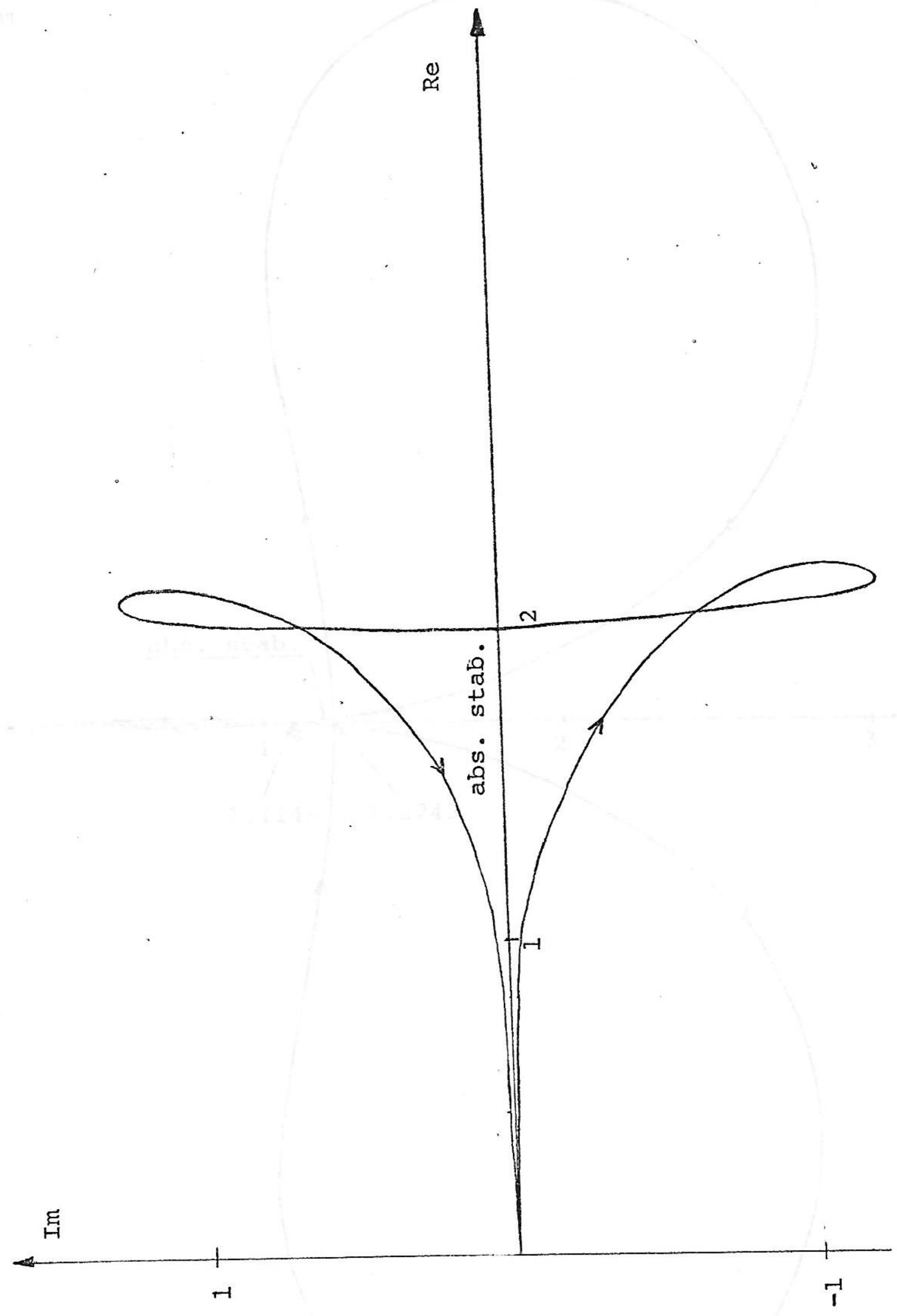
k	$z^2_{k,\mathrm{Cowell}}(r)$
0	$-\dfrac{(r-1)^2}{r^2}$
1	$-\dfrac{(r-1)^2}{r}$
2	$-\dfrac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
3	$-\dfrac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1}$
4	$-\dfrac{240r^2(r-1)^2}{19r^4+204r^3+14r^2+4r-1}$
5	$-\dfrac{240r^3(r-1)^2}{18r^5+209r^4+4r^3+14r^2-6r+1}$
6	$-\dfrac{60480r^4(r-1)^2}{4315r^6+53994r^5-2307r^4+7948r^3-4827r^2+1578r-221}$



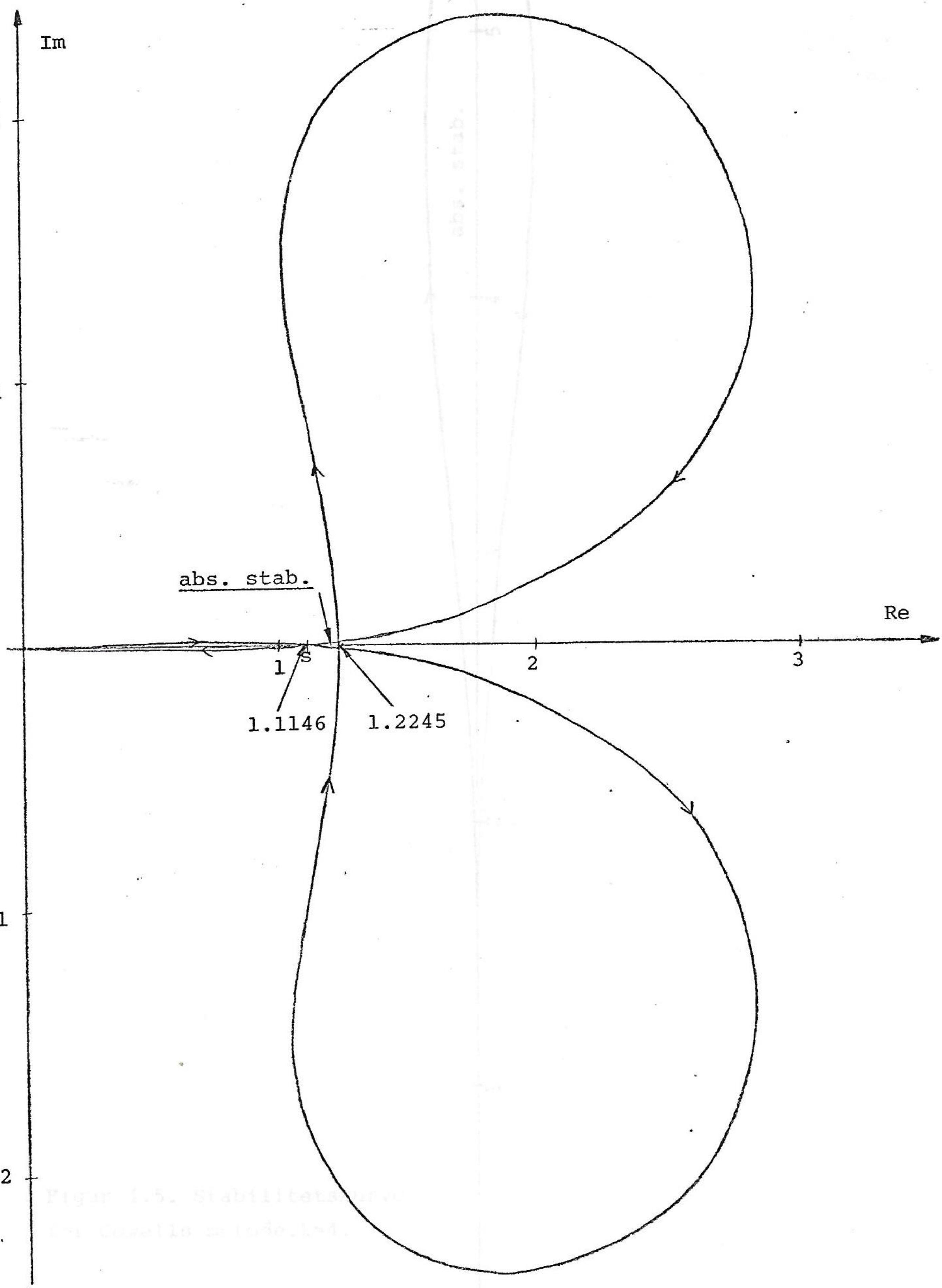
Figur 4.1. Stabilitetskurve for Cowells metode,k=0.



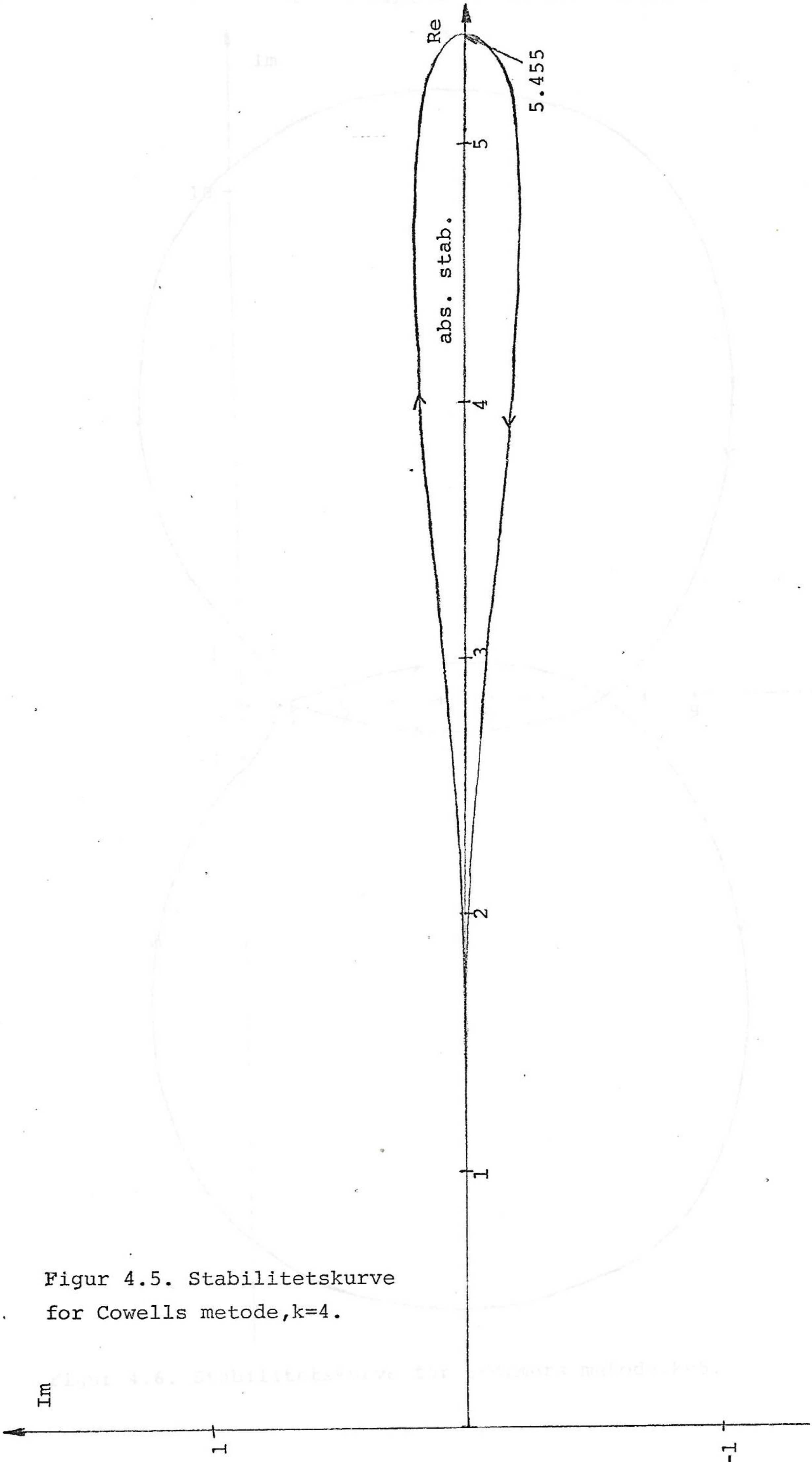
Figur 4.2. Stabilitetskurve for Stφrmers metode,k=2.



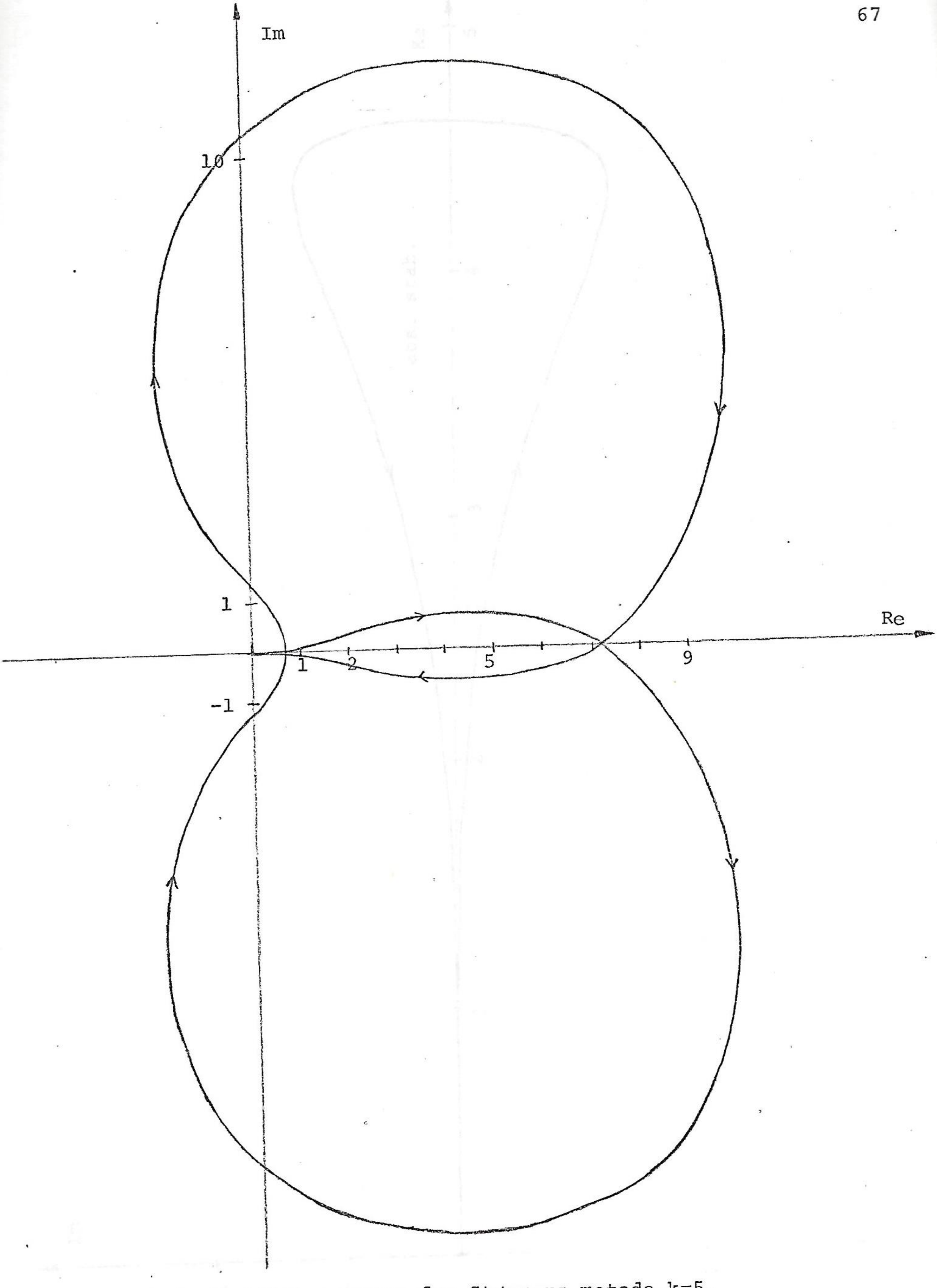
Figur 4.3. Stabilitetskurve for Størmers metode,k=3.



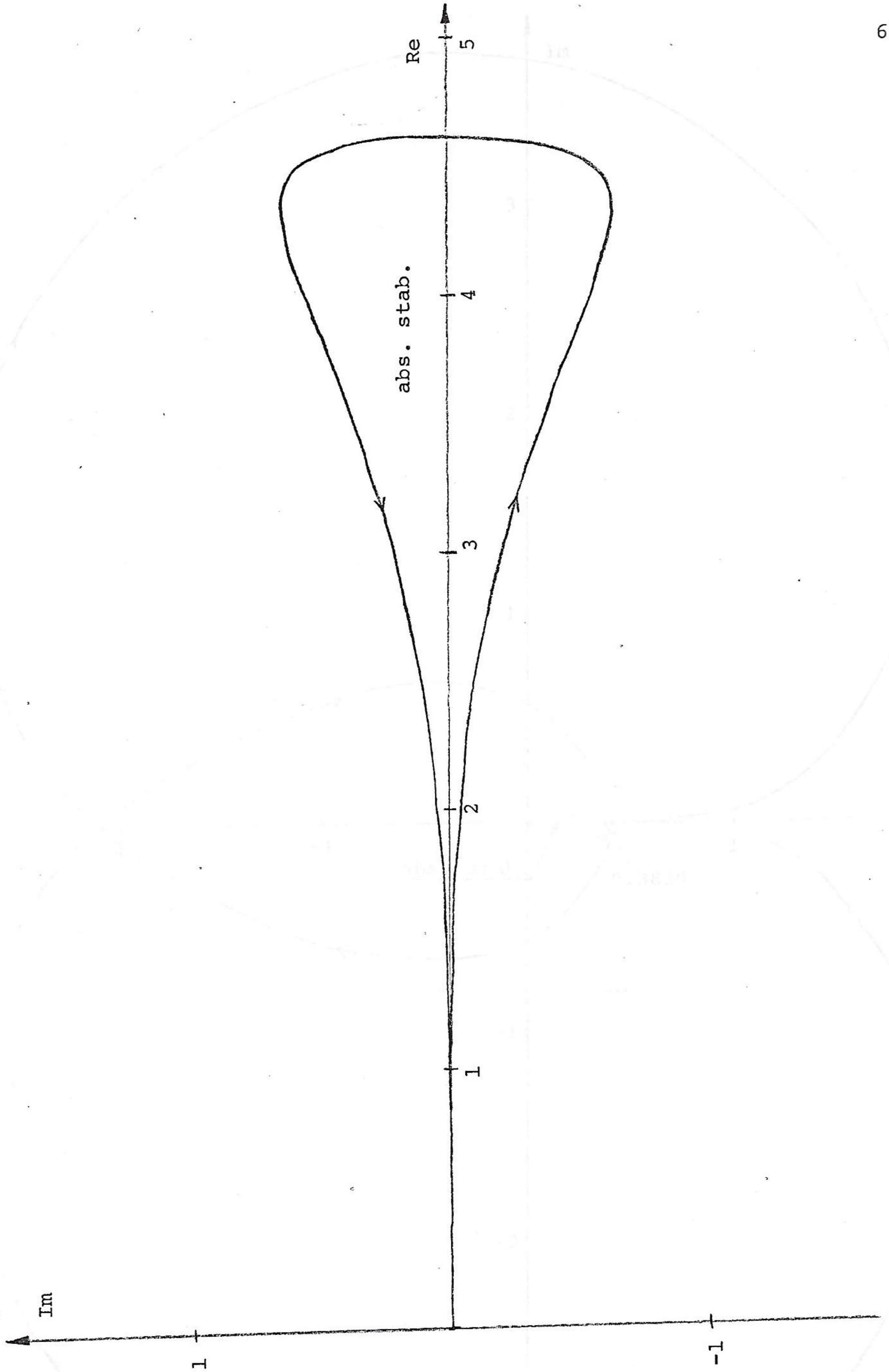
Figur 4.4. Stabilitetskurve for Størmers metode,k=4.



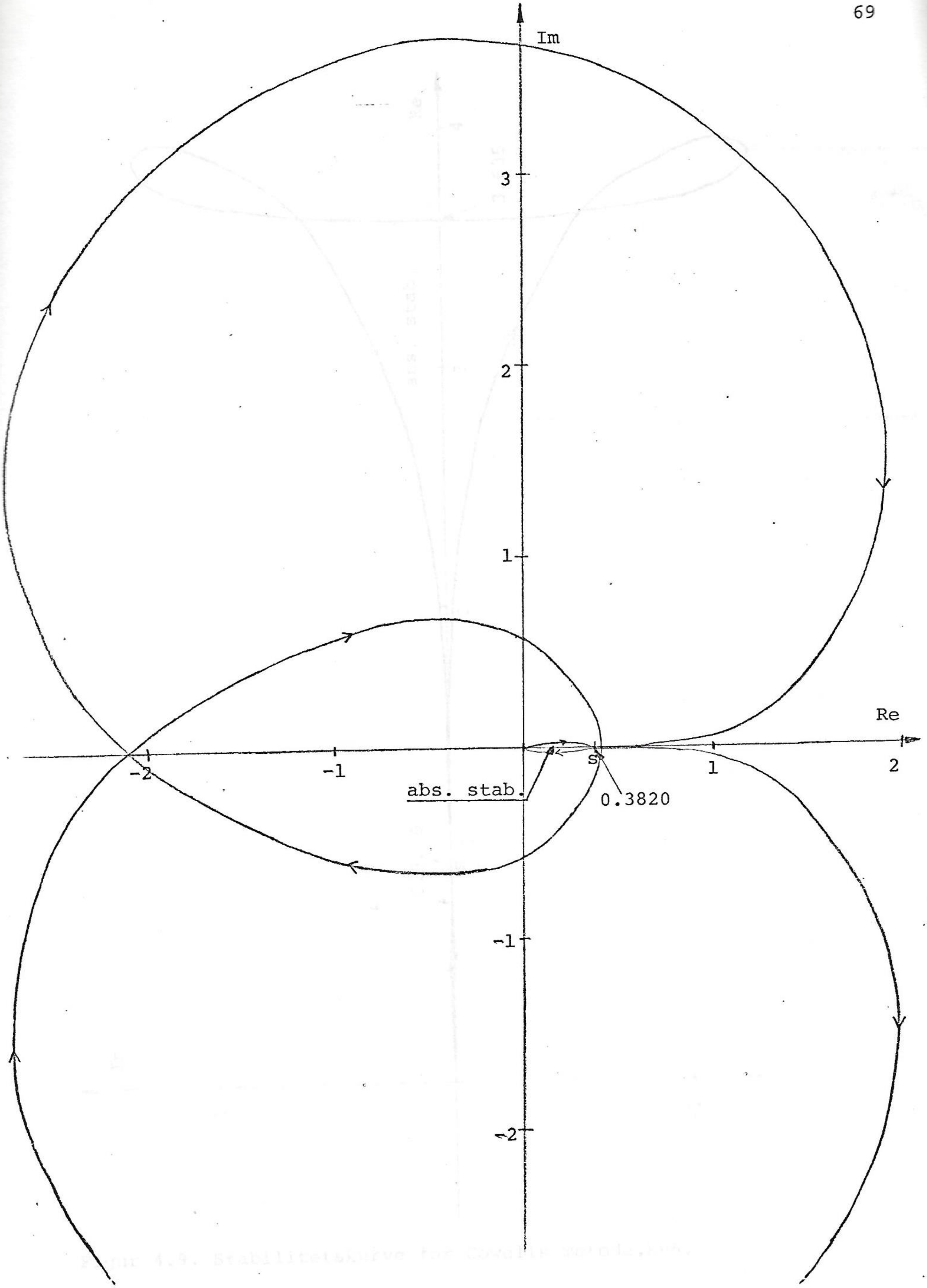
Figur 4.5. Stabilitetskurve
for Cowells metode,k=4.



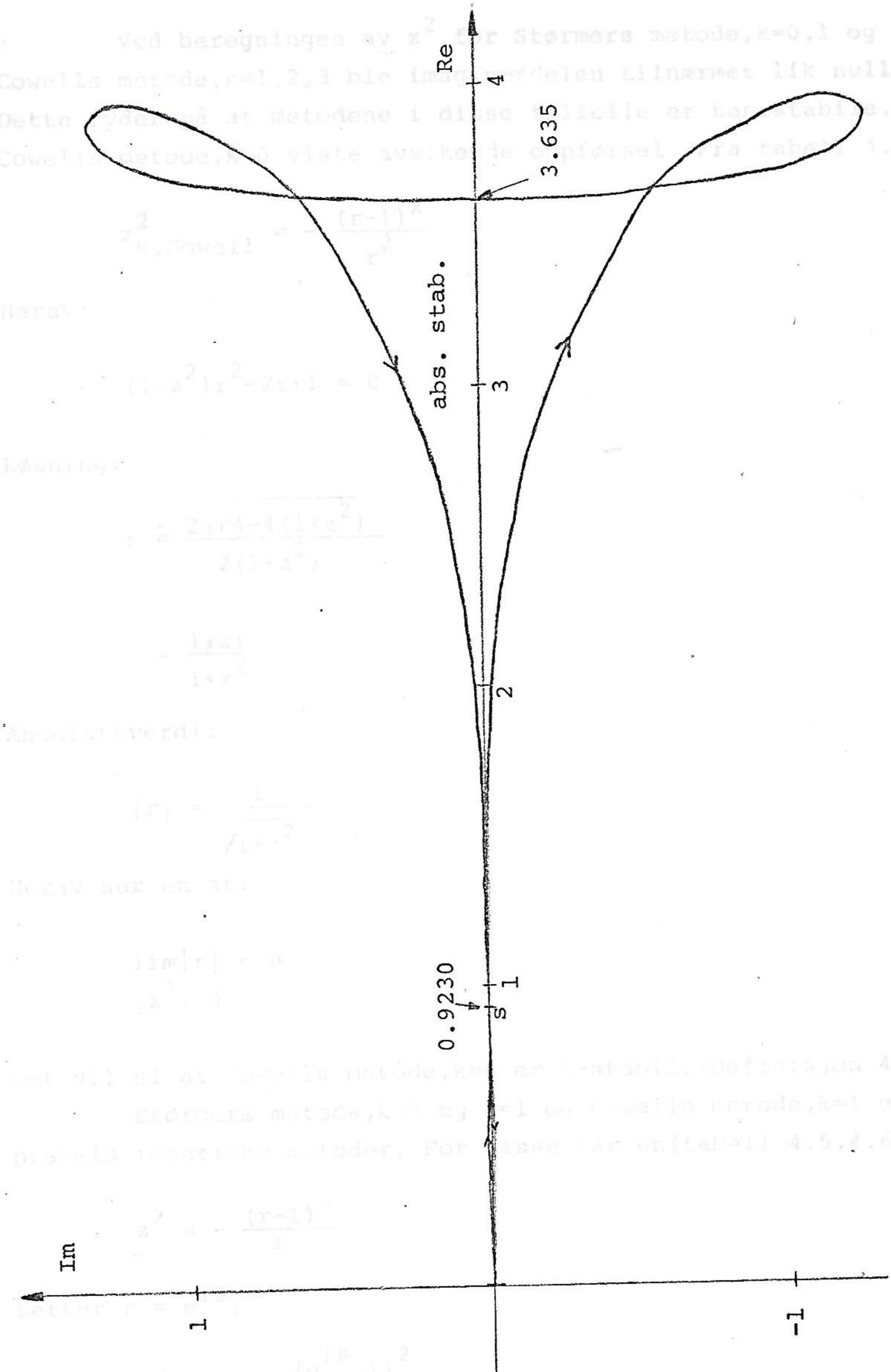
Figur 4.6. Stabilitetskurve for Størmers metode,k=5.



Figur 4.7. Stabilitetskurve for Cowells metode,k=5.



Figur 4.8. Stabilitetskurve for Størmers metode,k=6.



Figur 4.9. Stabilitetskurve for Cowells metode,k=6.

Ved beregningen av z^2 for Størmers metode,k=0,1 og Cowells metode,k=1,2,3 ble imaginærdelen tilnærmet lik null. Dette tyder på at metodene i disse tilfelle er banestabile. Cowells metode,k=0 viste avvikende oppførsel. Fra tabell 4.6:

$$z^2_{0,\text{Cowell}} = -\frac{(r-1)^2}{r^2} \tag{4.147}$$

Herav:

$$(1+z^2)r^2-2r+1 = 0 \tag{4.148}$$

Løsning:

$$r = \frac{2\pm\sqrt{4-4(1+z^2)}}{2(1+z^2)} \tag{4.149a}$$

$$= \frac{1\pm zi}{1+z^2} \tag{4.149b}$$

Absoluttverdi:

$$|r| = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \tag{4.150}$$

Herav ser en at:

$$\lim_{|z^2|\to 0}|r| = 0$$

Det vil si at Cowells metode,k=0 er L-stabil.(Definisjon 4.4)

Størmers metode,k=0 og k=1 og Cowells metode,k=1 er i praksis identiske metoder. For disse har en(tabell 4.5,4.6):

$$z^2 = -\frac{(r-1)^2}{r} \tag{4.151}$$

Setter $r = e^{i\theta}$:

$$z^2(\theta) = -\frac{(e^{i\theta}-1)^2}{e^{i\theta}} \tag{4.152a}$$

$$= -(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}})^2 \tag{4.152b}$$

$$= 4\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{4.152c}$$

Det betyr altså at når $z^2 \varepsilon [0,4]$ vil minst en av røttene r i (4.151) ligge på enhetssirkelen. (4.152c) innsatt i (4.151) og ordning gir:

$$r^2 + (4\sin^2\frac{\theta}{2} - 2)r + 1 = 0 \qquad (4.153a)$$

eller

$$r^2 + 2\cos\theta \cdot r + 1 = 0 \qquad (4.153b)$$

Løsning:

$$r = -\cos\theta \pm i \cdot \sin\theta \qquad (4.154)$$

Når $\theta \neq n\pi$ fås altså to distinkte komplekskonjugerte røtter med absoluttverdi 1. Det betyr at disse metodene er banestabile på intervallet (0,4).

Cowells metode,k=2 og k=3 er også identiske. Fra tabell 4.6 følger:

$$z^2 = -\frac{12(r-1)^2}{r^2+10r+1} \qquad (4.155a)$$

$$= -\frac{12(r-1)^2}{(r-1)^2+12r} \qquad (4.155b)$$

Herav:

$$\frac{1}{z^2} = -\frac{1}{12} - \frac{r}{(r-1)^2} \qquad (4.156)$$

Setter igjen $r = e^{i\theta}$. Det gir idet en benytter (4.152c):

$$\frac{1}{z^2(\theta)} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad (4.157)$$

Ordnet:

$$z^2(\theta) = \frac{12\sin^2\frac{\theta}{2}}{3-\sin^2\frac{\theta}{2}} \qquad (4.158)$$

For $z^2 \in [0,6]$ vil minst en rot i (4.155a) ligge på enhetssirkelen. Hvis en setter (4.158) inn i (4.155a) fås (4.153b). Samme resonnement som ovenfor gir da at Cowells metode er banestabil på intervallet (0,6).

Oppsummerer resultatene i følgende sats:

Sats 4.5. *Størmers metode er banestabil når*
$k = 0,1$. Intervall: (0,4).
Cowells metode er banestabil når
$k = 1$. Intervall: (0,4)
$k = 2,3$. Intervall: (0,6).
Cowells metode er L-stabil når
$k=0$.

5. UNDERSØKELSE AV ABSOLUTT STABILITET FOR DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

De trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder er på formen

$$\vec{u}_{n+1-v} = 2\cos Q\cdot\vec{u}_{n-v} - \vec{u}_{n-1-v} + \sum_{j=0}^{k} \sigma_j(Q,v)\nabla^j(h^2\vec{\phi}_n + Q^2\vec{u}_n) \tag{5.1}$$

For disse metoder er det gjort tilsvarende undersøkelser av absolutt stabilitet som for Størmers og Cowells metoder i avsnitt 4.2. Også her antas $Q = Q(1\times1) = q$ for enkelthets skyld.

Testlikning:

$$y'' = -\lambda^2 y \tag{5.2}$$

(5.2) innsatt i (5.1) gir($z^2 = -\lambda^2h^2$):

$$r^{1-v} = 2\cos q\cdot r^{-v} - r^{-1-v} + \sum_{j=0}^{k}\sigma_j(q)(-z^2+q^2)(1-r^{-1})^j \tag{5.3}$$

Herav:

$$z^2_{k,v}(q) = q^2 - \frac{r^2 - 2\cos q\cdot r+1}{r^{1+v}\sum_{j=0}^{k}\sigma_j(q,v)(1-r^{-1})^j} \tag{5.4}$$

v=0: Trigonometrisk tilpasset Størmermetode.

v=1: Trigonometrisk tilpasset Cowellmetode.

Vi vet fra avsnitt 4.2 at Størmers metode,k=0 er banestabil på (0,4). La oss nå undersøke hvordan banestabiliteten påvirkes av den trigonometriske tilpasning. Fra (5.4) og (2.86):

$$z^2_{0,0}(q) = q^2 - \frac{r^2-2\cos q\cdot r+1}{r\cdot\sigma_0} \tag{5.5a}$$

$$= q^2 - \frac{r^2-2\cos q\cdot r+1}{r\cdot 2q^{-2}(1-\cos q)} \tag{5.5b}$$

Ordnet:

$$r^2 - 2[\cos q+q^{-2}(\cos q-1)(z^2-q^2)]r + 1 = 0 \tag{5.6}$$

Anta z^2 reell. For at metoden skal være banestabil, må røttene være distinkte og ligge på enhetssirkelen. Siden koeffisientene i (5.6) er reelle, er røttene komplekskonjugerte. Altså:

$$r_1 = ae^{i\theta}, \; r_2 = ae^{-i\theta}$$

Fra (5.6) har en videre:

1. $\quad r_1 \cdot r_2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

Velger a = 1.

2. $\quad 2[\cos q + q^{-2}(\cos q - 1)(z^2 - q^2)] = r_1 + r_2 = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$

Kravet om at røttene skal være distinkte impliserer $\cos\theta \neq \pm 1$. Det betyr at:

$$|\cos\theta| < 1 \tag{5.7}$$

Herav:

$$|\cos q + q^{-2}(\cos q - 1)(z^2 - q^2)| < 1 \tag{5.8}$$

Fra denne ulikheten fås:

$$0 < z^2 < \frac{2q^2}{1-\cos q} \;, \; q \neq n\cdot 2\pi \;, \; n \text{ naturlig tall.} \tag{5.9}$$

Definerer w:

$$w(q) \equiv \frac{2q^2}{1-\cos q} \tag{5.10}$$

og q_0:

$$\left.\frac{dw}{dq}\right|_{q=q_0} \equiv 0 \tag{5.11}$$

En finner at

$$w(q_0) = \frac{4q_0}{\sin q_0} \tag{5.12}$$

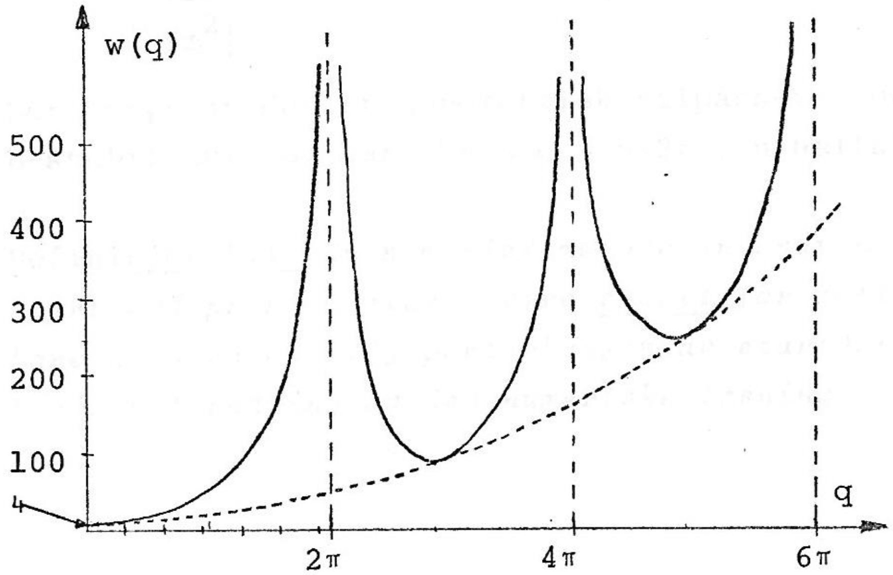
Betegner de ulike q_0 med $q_{0,n}$ slik at

$$(n-1)2\pi < q_{0,n} < n\cdot 2\pi \tag{5.13}$$

$w(q_{0,n})$ er altså øvre endepunkt for minste banestabile område når q ligger i intervallet $((n-1)2\pi, n\cdot 2\pi)$.

Tabell 5.1. $q_{0,n}$ og $w(q_{0,n})$, $n = 1(1)10$.

n	$q_{0,n}$	$p(q_{0,n})$
1	0	4
2	8.9869	84.763
3	15.451	242.72
4	21.808	479.60
5	28.132	795.43
6	34.442	1190.2
7	40.743	1664.0
8	47.039	2216.7
9	53.332	2848.3
10	59.623	3558.9



Figur 5.1. Variasjon i banestabilt område for TTS_0.

I figur 5.1 er angitt hvordan det banestabile området for den trigonometrisk tilpassete Størmermetode,k=0 varierer med q. Med mindre nøyaktighetskrav forhindrer det, så kan en altså ta skritt på flere perioder uten å tape banestabilitet. Metoden integrerer eksakt dersom $\vec{y} \in \vec{F}_1(At) \oplus \vec{p}_0(t)$. Hvis nå egenverdiene til A har stor variasjon i størrelsesorden, kan det være aktuelt å ta flere av de korteste periodene i ett skritt når en integrerer over den lengste perioden hvis en bare er interessert i de langsomste komponentene i et koplet system.

En finner tilsvarende resultater for de andre metodene som er banestabil for q=0.

Cowells metode,k=0 er L-stabil. Fra (5.4)(k=0 og v=1) og (2.91) følger:

$$z_{0,1}^2 = q^2 - \frac{r^2-2\cos q\cdot r+1}{r^2(2q^{-2}(1-\cos q))} \tag{5.14}$$

Ordnet:

$$r^2[2(z^2-q^2)q^{-2}(1-\cos q)+1]-2\cos q\cdot r+1 = 0 \tag{5.15}$$

Herav:

$$|r| = \frac{\sqrt{4\cos^2 q+|4\cos^2 q-8(z^2-q^2)q^{-2}(1-\cos q)|}}{4(z^2-q^2)q^{-2}(1-\cos q)} \tag{5.16}$$

En har da at:

$$\lim_{|z^2|\to\infty}|r| = 0 \Leftrightarrow q^{-2}(1-\cos q) \neq 0 \Leftrightarrow q \neq n\cdot 2\pi$$

Det betyr at den trigonometrisk tilpassete Cowellmetode er L-stabil hvis og bare hvis $q \neq n\cdot 2\pi$, n heltall.

<u>Definisjon 5.1.</u> *En numerisk metode anvendt på et ordinært startverdiproblem sies å være <u>stabil</u> for dette problem hvis og bare hvis en endelig perturbasjon av startverdiene gir en begrenset endring av den numeriske løsning.*

I figurene 5.2-9 er plottet stabilitetskurver for TTS(k=4) og TTC(k=4) for fire ulike tilpasninger: $q = n\frac{2\pi}{5}$, $n=1(1)4$.
Det framgår av disse figurene at metodene er absolutt stabile når z^2 er litt større enn q^2. Dette betyr at en for problemer av typen

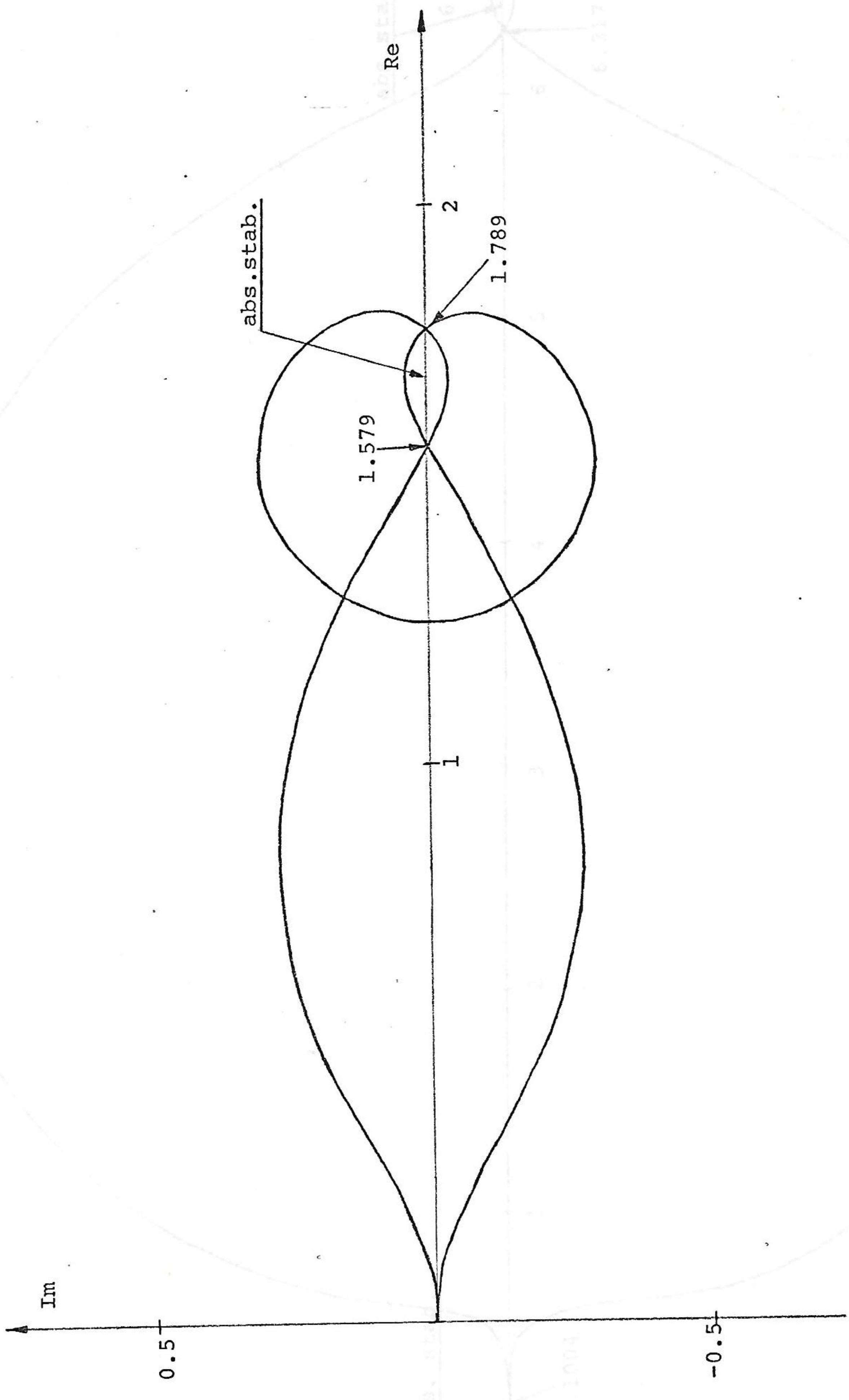
$$\vec{y}'' = -D^2\vec{y} \tag{5.17}$$

hvor D er en reell diagonalmatrise, burde tilpasse metoden med

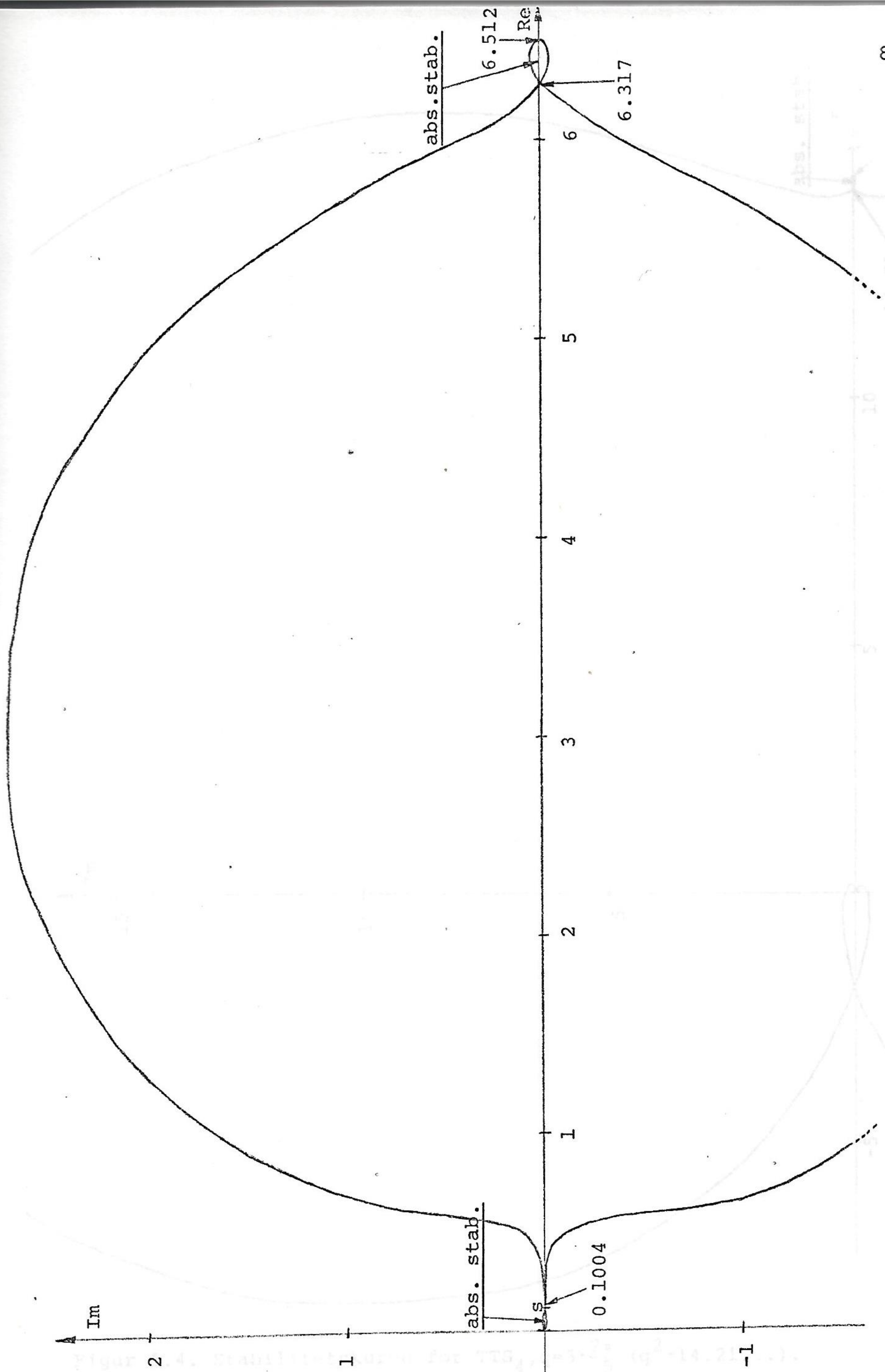
$$A^2 = (1-\varepsilon)D^2 \ , \ \varepsilon>0 \ , \ \varepsilon \text{ liten} \tag{5.18}$$

for å sikre stabilitet når en integrerer med fast skritt.
Hvordan stabiliteten ved løsning av et generelt problem og med varierende skritt avhenger av tilpasningen, er det naturligvis vanskelig å si noe sikkert om. En bør imidlertid i alle fall være oppmerksom på at den "best mulige" tilpasning ikke nødvendigvis gir den mest effektive algoritme.

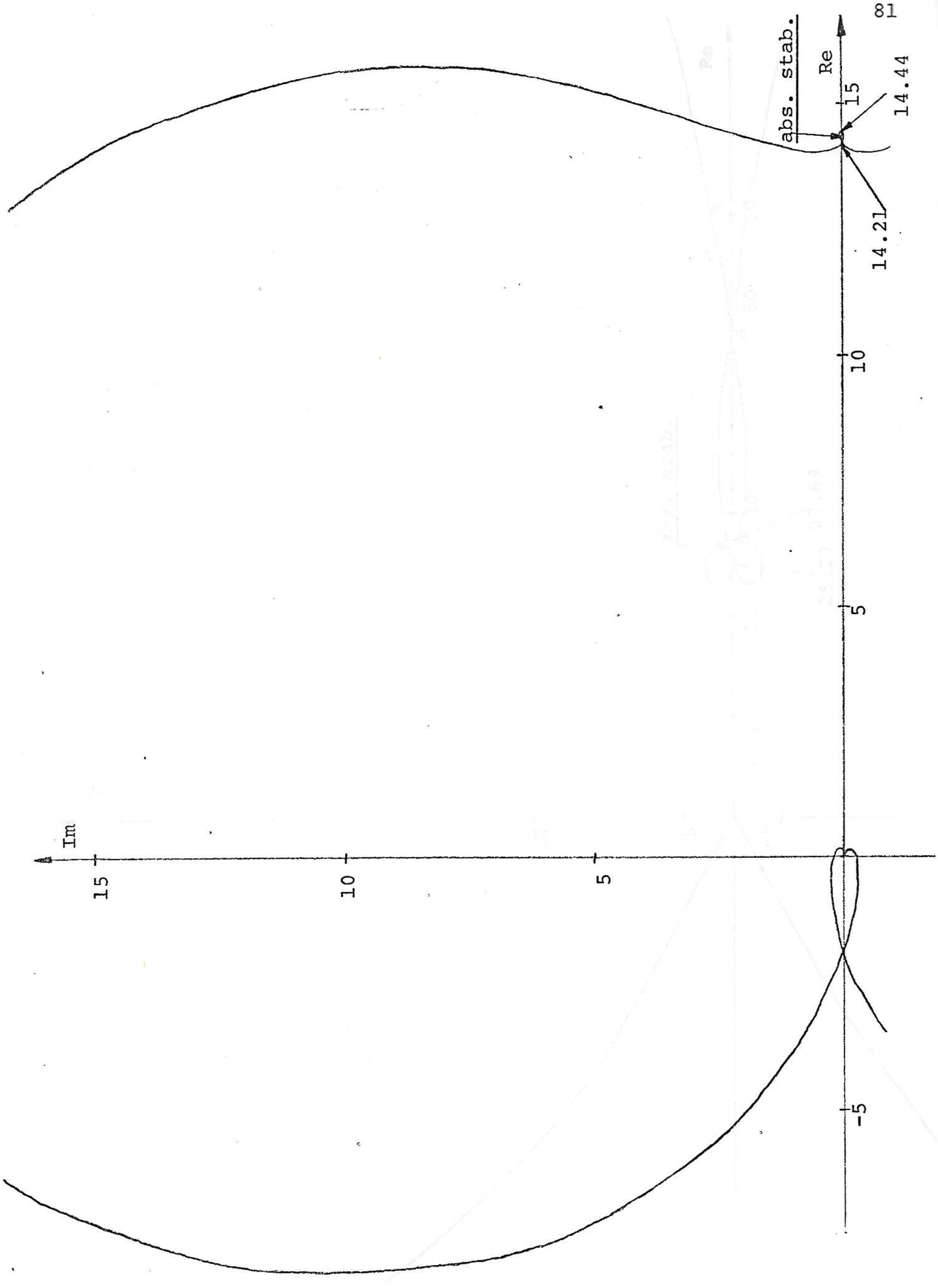
Vi merker oss dessuten at $TTC_4, q= \frac{4}{5}\cdot 2\pi$ er L-stabil.



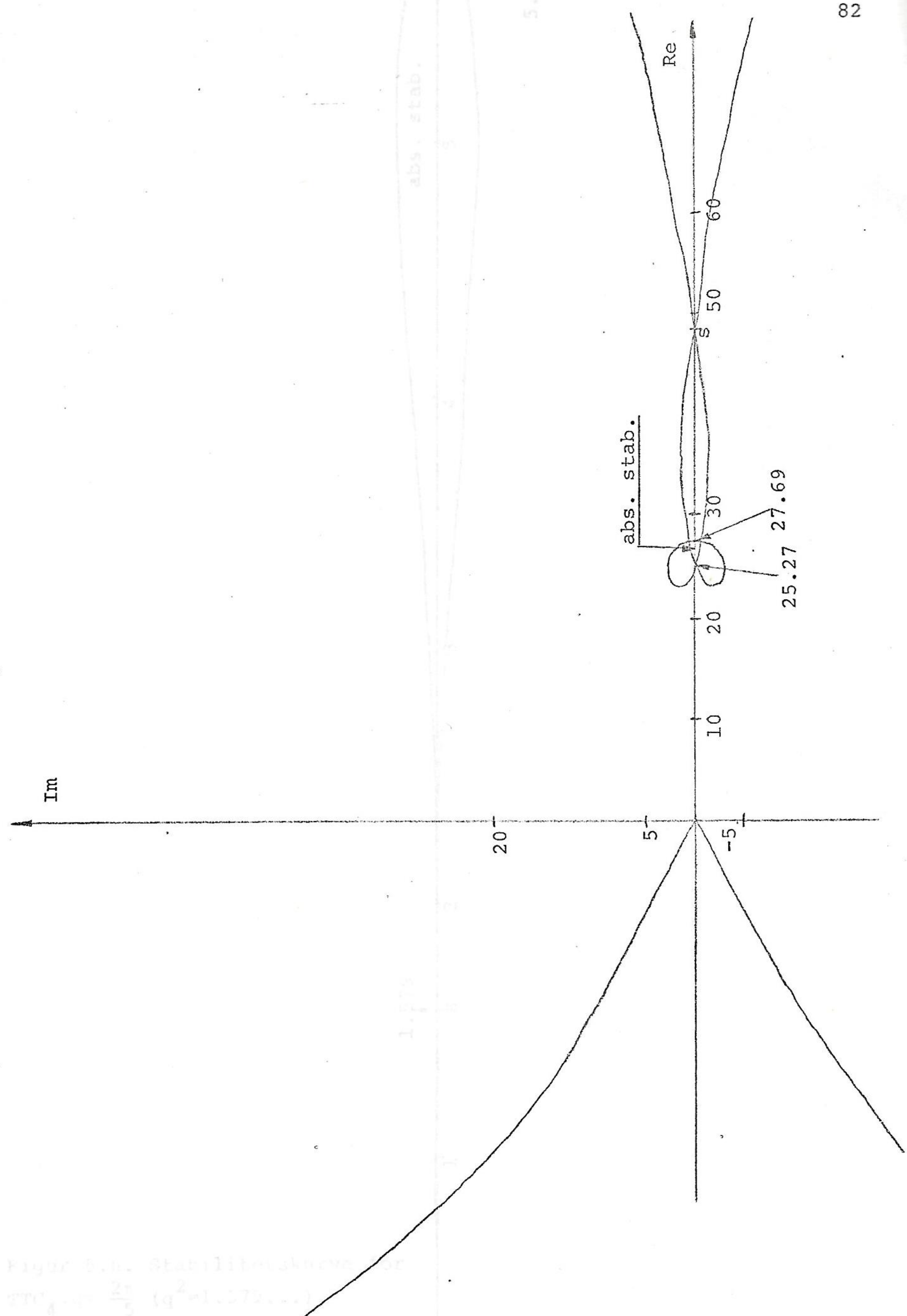
Figur 5.2. Stabilitetskurve for TTS_4, $q= \frac{2\pi}{5}$ $(q^2=1.579\ldots)$.



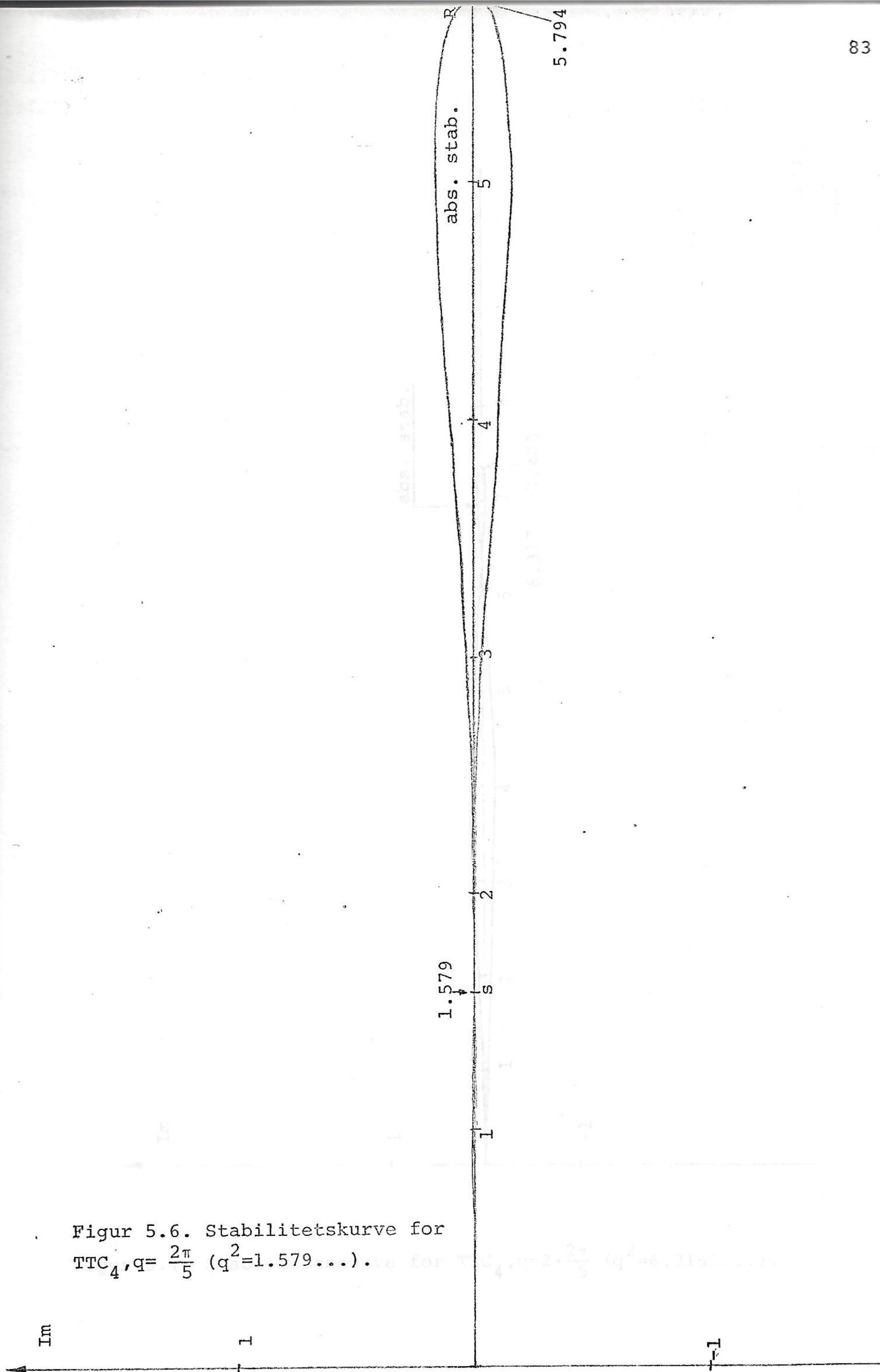
Figur 5.3. Stabilitetskurve for TTS_4, $q=2\cdot\frac{2\pi}{5}$ ($q^2=6.3165\ldots$).



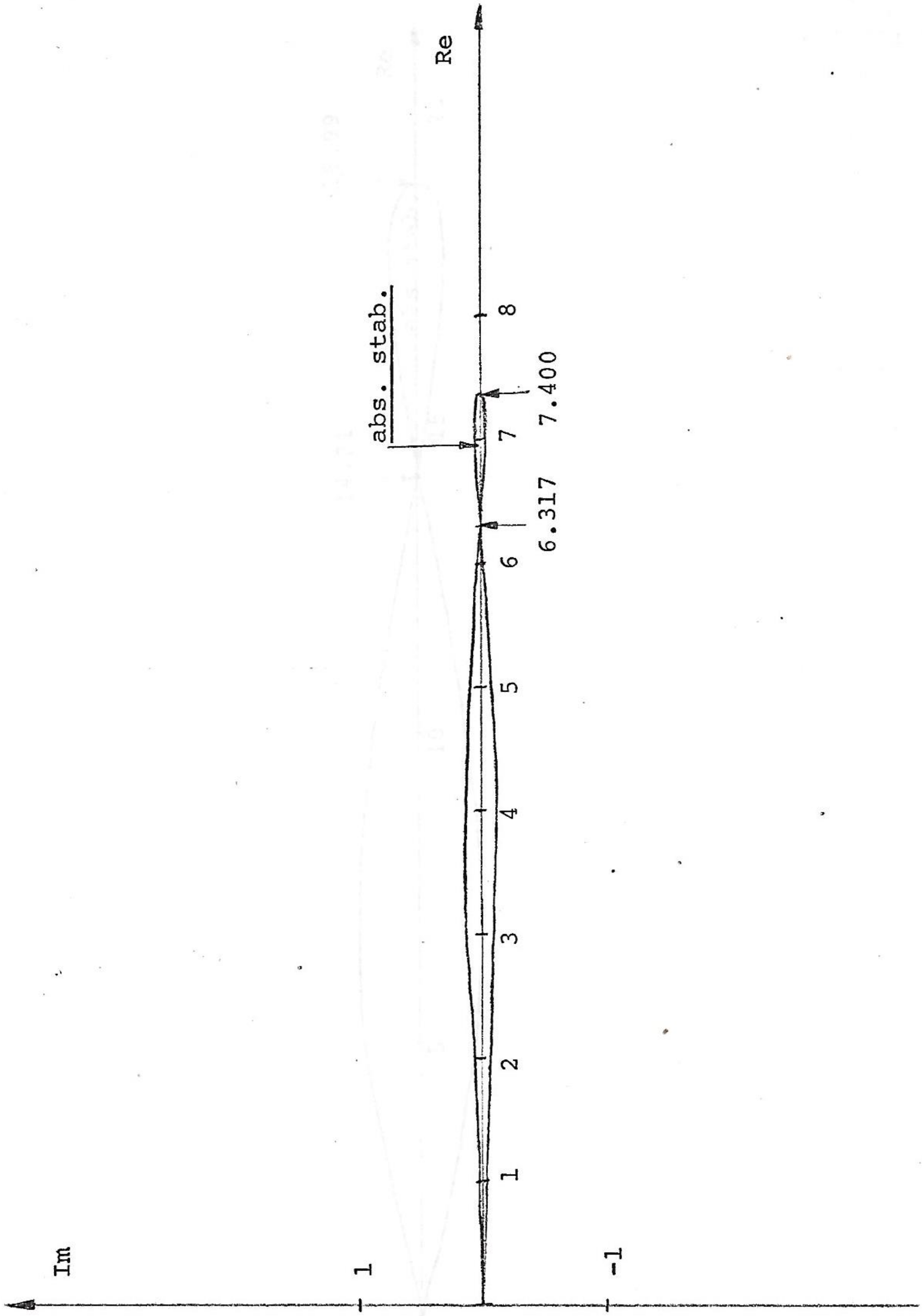
Figur 5.4. Stabilitetskurve for $TTS_4, q=3\cdot\frac{2\pi}{5}$ ($q^2=14.21\ldots$).



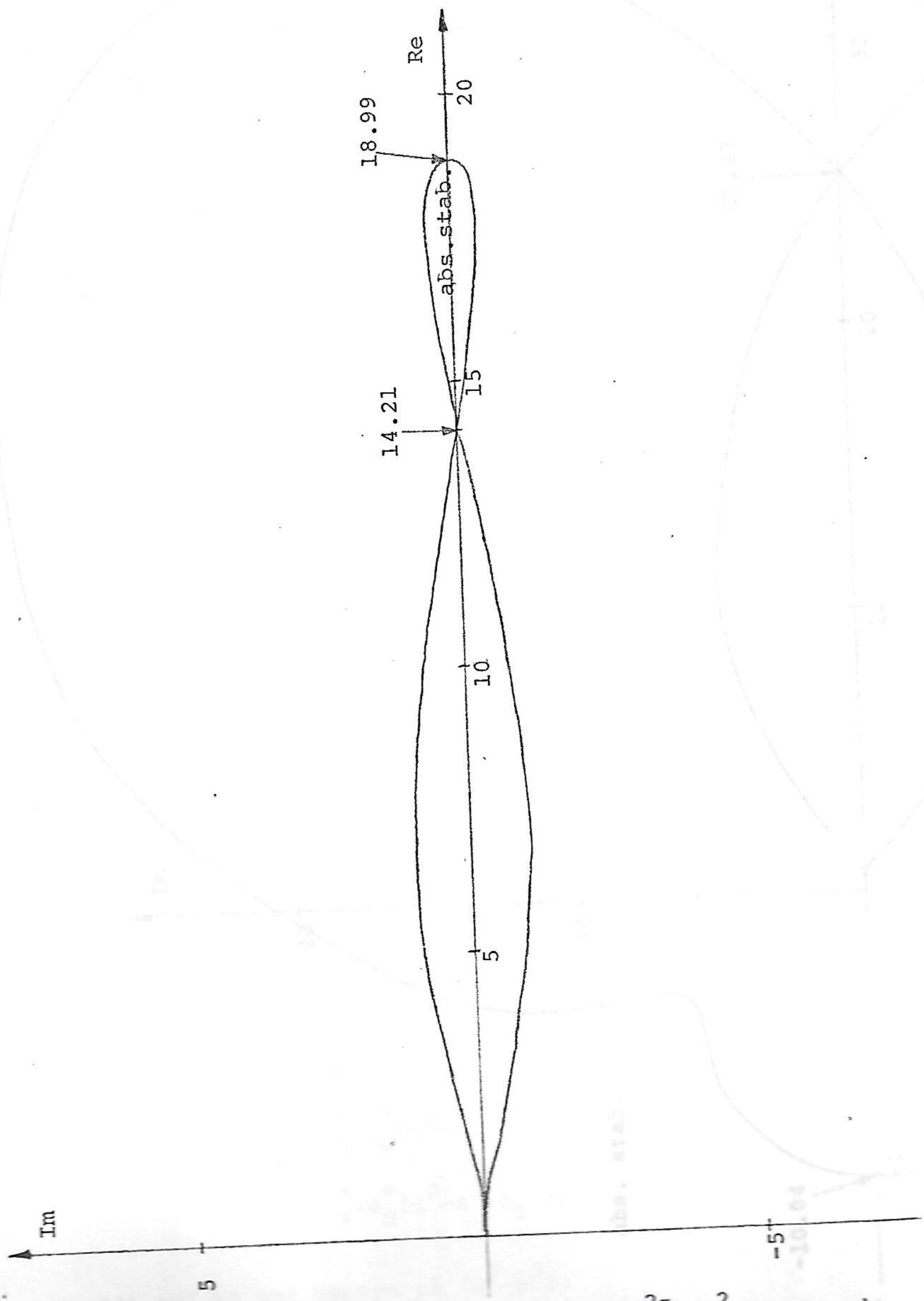
Figur 5.5. Stabilitetskurve for TTS_4, $q=4\cdot\frac{2\pi}{5}$ ($q^2=25.266\ldots$).



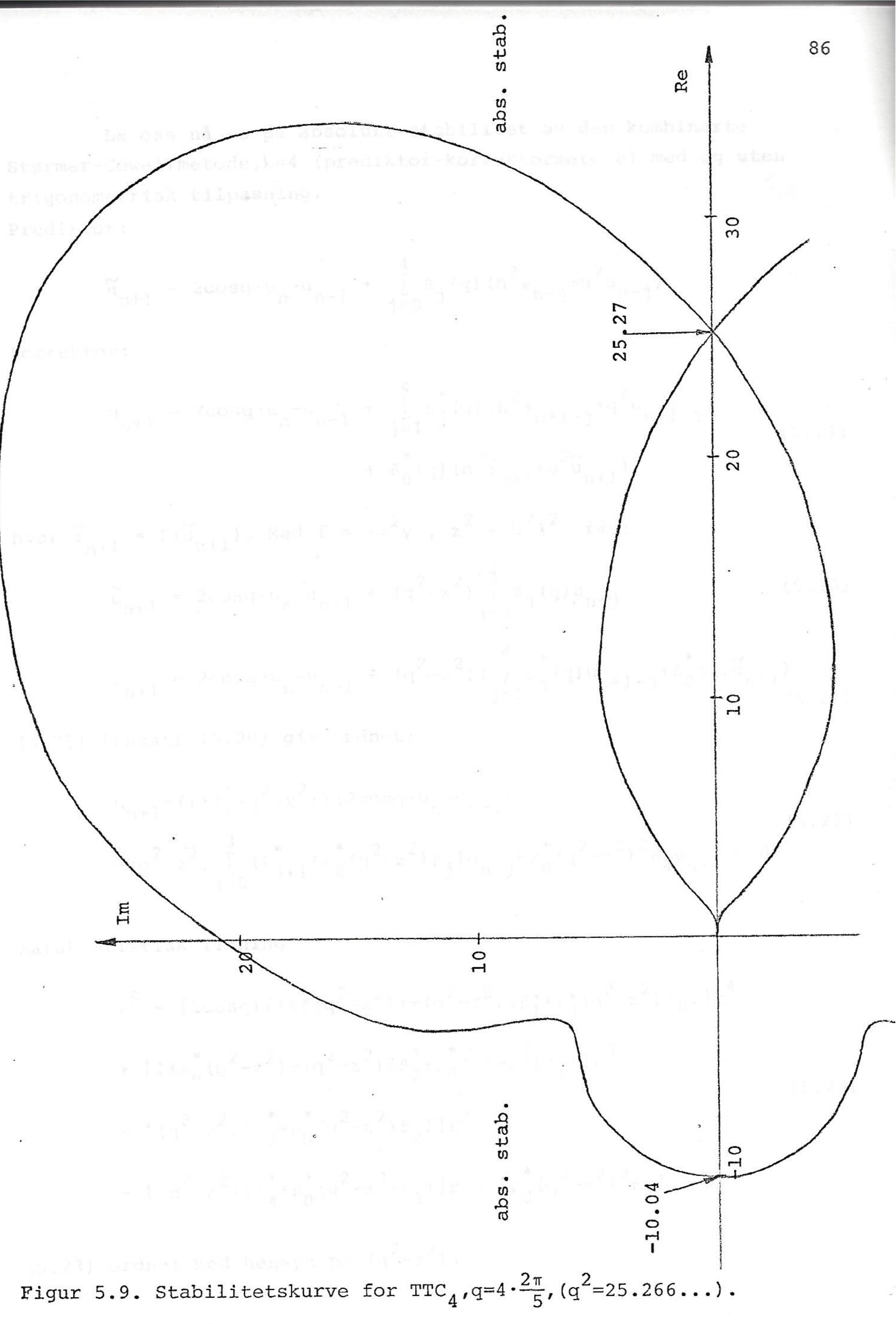
Figur 5.6. Stabilitetskurve for TTC_4, $q = \frac{2\pi}{5}$ ($q^2 = 1.579\ldots$).



Figur 5.7. Stabilitetskurve for TTC_4, $q=2\cdot\frac{2\pi}{5}$ $(q^2=6.3165\ldots)$.



Figur 5.8. Stabilitetskurve for TTC_4, $q=3\cdot\frac{2\pi}{5}$ ($q^2=14.21\ldots$).



Figur 5.9. Stabilitetskurve for TTC_4, $q=4\cdot\frac{2\pi}{5}$, $(q^2=25.266\ldots)$.

La oss nå se på absolutt stabilitet av den kombinerte Størmer-Cowellmetode, k=4 (prediktor-korrektormetode) med og uten trigonometrisk tilpasning.

Prediktor:

$$\tilde{u}_{n+1} = 2\cos q\cdot u_n - u_{n-1} + \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)(h^2\phi_{n-j} + q^2 u_{n-j}) \tag{5.18}$$

Korrektor:

$$u_{n+1} = 2\cos q\cdot u_n - u_{n-1} + \sum_{j=1}^{4} \beta_j^*(q)(h^2\phi_{n+1-j} + q^2 u_{n+1-j}) + \beta_0^*(q)(h^2\tilde{\phi}_{n+1} + q^2\tilde{u}_{n+1}) \tag{5.19}$$

hvor $\tilde{\phi}_{n+1} = f(\tilde{u}_{n+1})$. Med $f = -\lambda^2 y$, $z^2 = h^2\lambda^2$ fås:

$$\tilde{u}_{n+1} = 2\cos q\cdot u_n - u_{n-1} + (q^2-z^2)\sum_{j=0}^{4} \beta_j(q) u_{n-j} \tag{5.20}$$

$$u_{n+1} = 2\cos q\cdot u_n - u_{n-1} + (q^2-z^2)\left(\sum_{j=1}^{4} \beta_j^*(q) u_{n+1-j} + \beta_0^*(q)\tilde{u}_{n+1}\right) \tag{5.21}$$

(5.21) innsatt (5.20) gir ordnet:

$$u_{n+1} - (1+\beta_0^*(q^2-z^2))(2\cos q\cdot u_n - u_{n-1}) - (q^2-z^2)\sum_{j=0}^{3}(\beta_{j+1}^* + \beta_0^*(q^2-z^2)\beta_j)u_{n-j} - \beta_0^*(q^2-z^2)^2\beta_4 u_{n-4} = 0 \tag{5.22}$$

Karakteristisk likning:

$$\begin{aligned} r^5 &- [2\cos q(1+\beta_0^*(q^2-z^2)) + (q^2-z^2)(\beta_1^* + \beta_0^*(q^2-z^2)\beta_0)]r^4 \\ &+ [1+\beta_0^*(q^2-z^2) - (q^2-z^2)(\beta_2^* + \beta_0^*(q^2-z^2)\beta_1)]r^3 \\ &- [(q^2-z^2)(\beta_3^* + \beta_0^*(q^2-z^2)\beta_2)]r^2 \\ &- [(q^2-z^2)(\beta_4^* + \beta_0^*(q^2-z^2)\beta_3)]r - [\beta_0^*(q^2-z^2)^2\beta_4] = 0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

(5.23) ordnet med hensyn på (q^2-z^2):

$$[\beta_0^*(\beta_0 r^4+\beta_1 r^3+\beta_2 r^2+\beta_3 r+\beta_4)](q^2-z^2)^2$$
$$+ [(2\cos q\cdot\beta_0^*+\beta_1^*)r^4+(-\beta_0^*+\beta_2^*)r^3+\beta_3^* r^2+\beta_4^* r](q^2-z^2) \qquad (5.24)$$
$$- [r^5-2\cos q\cdot r^4+r^3] = 0$$

Herav:

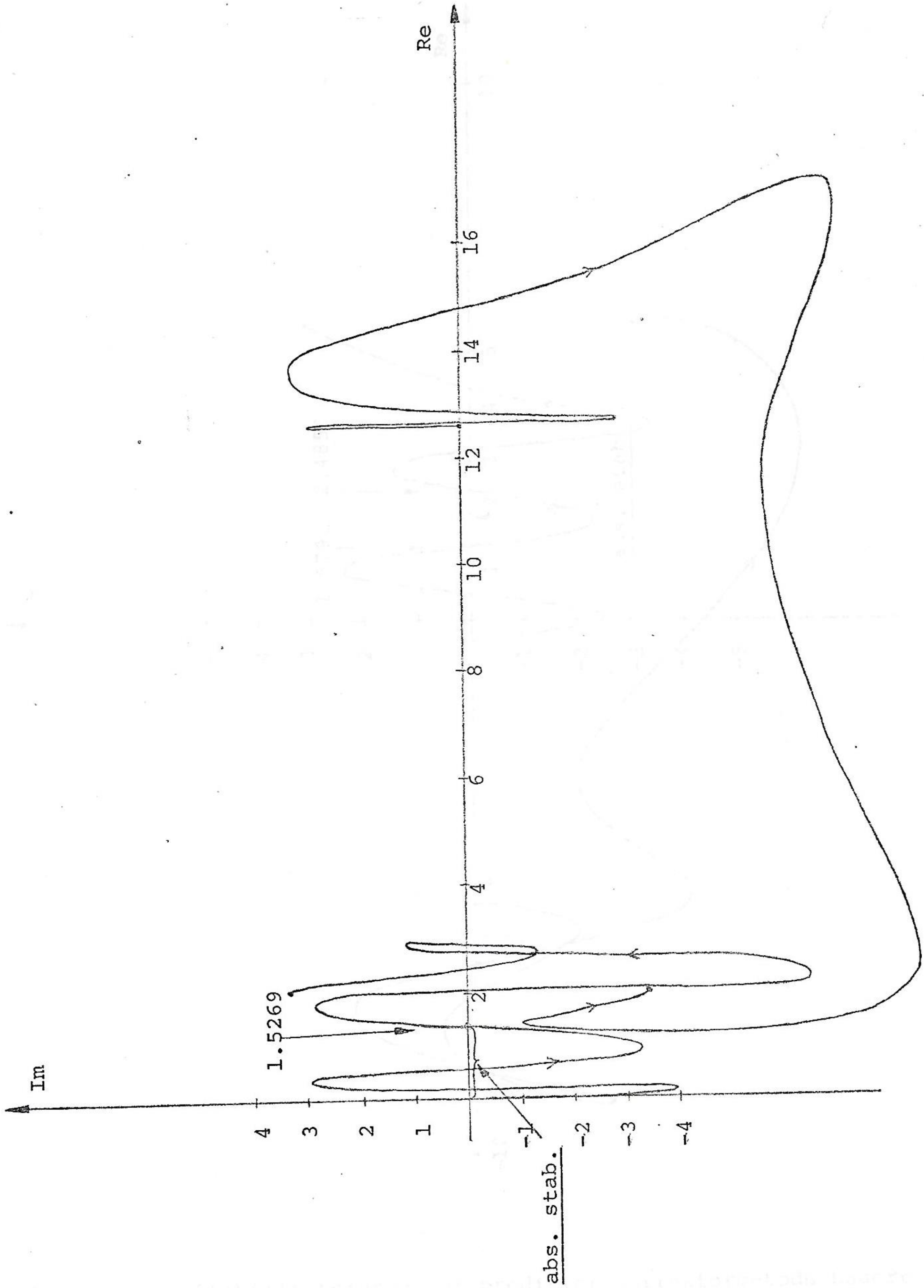
$$z^2 = q^2 - \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2-4c_0c_2}}{2c_2}$$

hvor c_i er koeffisienten foran $(q^2-z^2)^i$, $i = 0,1,2$.

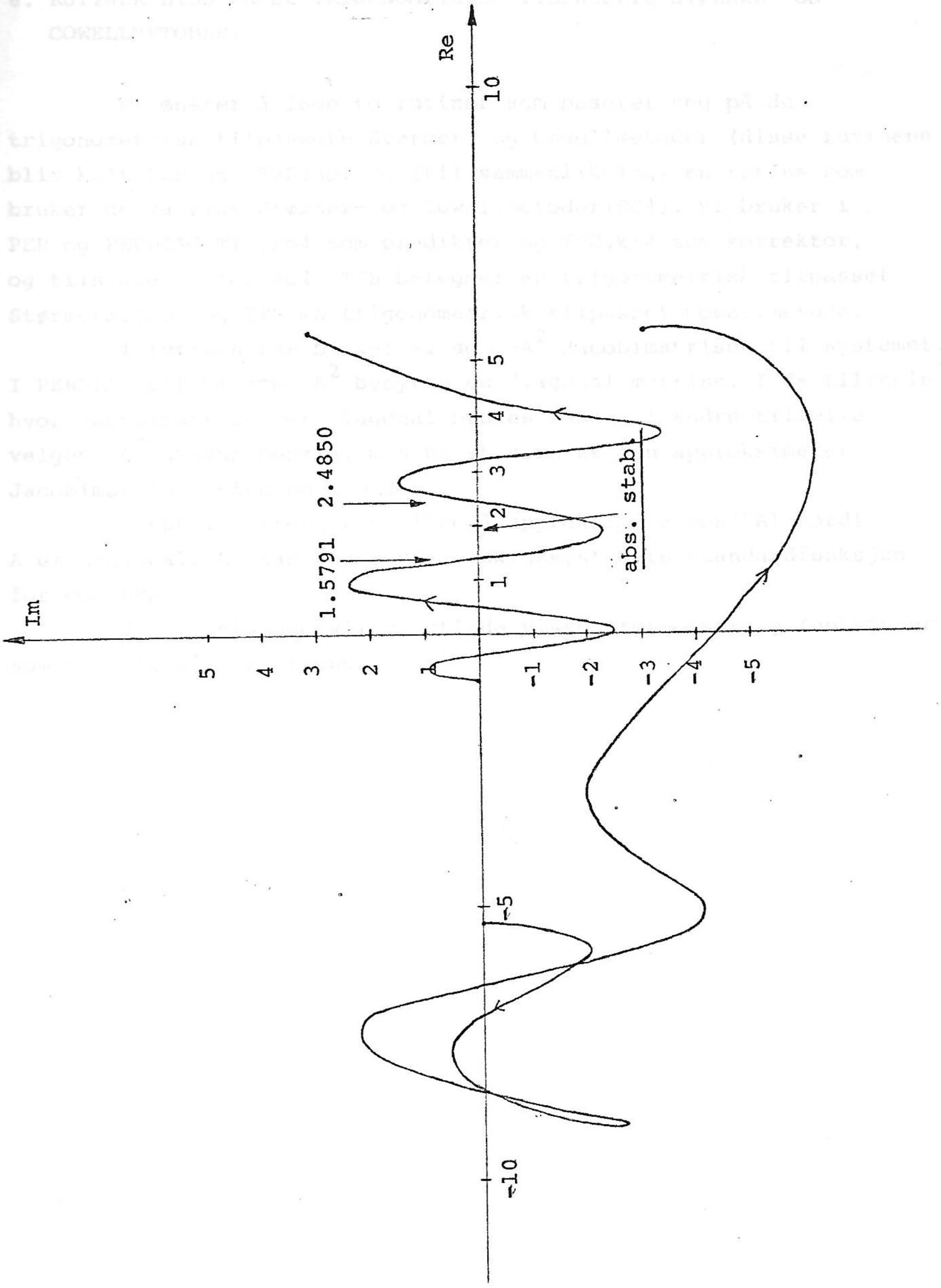
Stabilitetskurven svarende til enhetssirkelen $e^{i\theta}$ i øvre r-halvplan($\theta\varepsilon[0,\pi]$) for dette tilfelle er plottet i figurene 5.10 ($q=0$) og 5.11 ($q= \frac{2\pi}{5}$) , og de ulike intervallene er undersøkt med hensyn til absolutt stabilitet. Vi ser av figurene at metoden uten tilpasning ($q=0$) (svarer til SC4) er absolutt stabil på (0,1.5269). Med $q= \frac{2\pi}{5}$ (PERDIAG) er metoden absolutt stabil på (1.5791,2.4850) (q^2=1.5791...).

Stabilitetsegenskapene likner altså mest på de tilsvarende for korrektoren, noe som virker rimelig. Lengden av det absolutte stabilitetsintervall er imidlertid redusert.

Stabilitetsdiskusjonen omkring TTS_4 og TTC_4 separat skulle ha gyldighet også i dette tilfelle.



Figur 5.10. Stabilitetskurve for prediktor-korrektormetode basert på Størmers(prediktor) og Cowells(korrektor) metoder , k=4.



Figur 5.11. Stabilitetskurve for prediktor-korrektormetode basert på TTS_4(prediktor) og TTC_4(korrektor) med $q = \frac{2\pi}{5}$ (q^2=1.5791...).

6. RUTINER BYGD PÅ DE TRIGONOMETRISK TILPASSETE STØRMER- OG COWELLMETODER.

Vi ønsker å lage to rutiner som baserer seg på de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder (disse rutinene blir kalt PER og PERDIAG) og (til sammenlikning) en rutine som bruker de vanlige Størmer- og Cowellmetoder(SC4). Vi bruker i PER og PERDIAG TTS,k=4 som prediktor og TTC,k=4 som korrektor, og tilsvarende for SC4. TTS betegner en trigonometrisk tilpasset Størmermetode og TTC en trigonometrisk tilpasset Cowellmetode.

I rutinen PER bruker vi som $-A^2$ Jacobimatrisen til systemet. I PERDIAG vil vi som $-A^2$ benytte en diagonal matrise. I de tilfelle hvor Jacobimatrisen er diagonal brukes denne. I andre tilfelle velges $-A^2$ skjønnsmessig, men helst slik at den approksimerer Jacobimatrisen sånn noenlunde.

I PERDIAG trenger en ikke å approksimere cos(hA) fordi A er diagonal. En kan bruke datamaskinssystemets standardfunksjon for cosinus.

I det følgende vil vi utlede visse størrelser og funksjoner som skal inngå i rutinene.

6.1. CosQ-approksimasjon.

I PER må cosQ, Q=hA approksimeres. En kan velge i klassen av rasjonale approksimasjoner:

$$C(Q) = \left(\sum_{i=0}^{m_n} b_i Q^i\right)^{-1} \sum_{i=0}^{m_t} a_i Q^i \tag{6.1}$$

Hvis $b_i \neq 0$, $i \geq 1$ må en foreta en invertering for hver beregning av cosQ. Dette er ikke særlig ønskelig. Derfor vil vi bruke en polynomisk approksimasjon.

Med k=4 følger fra Teorem 3.1:

$$C(Q) = \cos Q + O(Q^{\alpha_4+2}) \tag{6.2}$$

hvis metodens orden skal bevares. Fra Lemma 3.1 har en at $\alpha_4=6$. Det betyr at en må velge en cosQ-approksimasjon C(Q) slik at:

$$\cos Q = C(Q) + O(Q^8) \tag{6.3}$$

Omkring Q=0 er den beste polynomiske approksimasjon til cosQ den trunkerte Maclaurinrekke:

$$C(Q) = I - \frac{Q^2}{2} + \frac{Q^4}{24} - \frac{Q^6}{720} \tag{6.4}$$

Denne vil vi bruke i PER.

6.2. Begrensning av skrittet h på grunn av cosQ-approksimasjonen.

En har at:

$$\cos Q = I - \frac{1}{2}Q^2 + \frac{1}{24}Q^4 - \frac{1}{720}Q^6 + \frac{1}{8!}Q^8 + O(Q^{10}) \tag{6.5}$$

$$= C(Q) + \frac{1}{8!}Q^8 + O(Q^{10}) \tag{6.6}$$

Når C(Q) brukes i stedet for cosQ i integrasjonsformlene, må en påse at denne approksimasjonsfeilen ikke blir vesentlig større enn feilen integrasjonsformlene gir uten cosQ-approksimasjon.

<u>Definisjon 6.1.</u> *Gitt en metode*

$$u_{n+1} = T(u_n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}).$$

<u>*Lokal trunkeringsfeil*</u> *i x_{n+1} for metoden defineres da som*

$$d_{n+1} \equiv T(y_n, y_{n-1}, \ldots, y_{n-k}) - y_{n+1} \,.$$

I alle rutinene inngår en størrelse eps som en vil prøve å holde (lokal trunkeringsfeil)/h under. For PER har en:
Prediktor:

$$\tilde{\vec{u}}_{n+1} = 2\cdot C(Q)\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \sigma_j(Q)\nabla^j \vec{G}_n \tag{6.7}$$

Korrektor:

$$\vec{u}_{n+1} = 2\cdot C(Q)\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \sigma_j(Q)\nabla^j \vec{G}_{n+1} \tag{6.8}$$

hvor $\vec{G}_{n+1} = \vec{f}(t_{n+1}, \tilde{\vec{u}}_{n+1}) + A^2\tilde{\vec{u}}_{n+1}$.

Antar nå som et estimat at feilen i $2\cdot C(Q)\vec{u}_n \cdot h$ bidrar like mye til den totale lokale trunkeringsfeil som cosQ-approksimasjonsfeilen i summene og feilen i integrasjonsformelen med C(Q) = cosQ til sammen. En har da:

$$||2\cos Q\cdot\vec{u}_n - 2C(Q)\vec{u}_n||_\infty \leq \frac{1}{2}\text{eps} \tag{6.9}$$

Fra (6.6) følger da:

$$||\frac{2}{8!}h^8A^8||_\infty \cdot ||u_n||_\infty \lesssim \frac{1}{2}eps \tag{6.10}$$

$$h^8 \lesssim \frac{8!\cdot eps}{4||A^8||_\infty \cdot ||u_n||_\infty}$$

$$\approx \frac{8!\cdot eps}{4||A^2||_\infty^4 \cdot ||u_n||_\infty} \tag{6.11}$$

$$h \lesssim \sqrt[8]{\frac{8!\cdot eps}{4||u_n||_\infty}} \Big/ \sqrt{||A^2||_\infty} \tag{6.12}$$

Men

$$||A^2||_\infty = \left|\left|\frac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}\right|\right|_\infty . \tag{6.13}$$

Altså:

$$h \lesssim \frac{\sqrt[8]{\dfrac{8!\cdot eps}{4||u_n||_\infty}}}{\sqrt{\left|\left|\dfrac{\partial\vec{f}}{\partial\vec{y}}\right|\right|_\infty}} \equiv h_{maks} \tag{6.14}$$

En ønsket fordobling av skrittet godtas hvis og bare hvis

$$2h < h_{maks}. \tag{6.15}$$

6.3. Feilestimering for prediktor-korrektormetode basert på TTS_4 og TTC_4.

I dette avsnittet regnes skalart. $\tilde{\phi}_{n+1}$ betegner $f(t_{n+1},\tilde{u}_{n+1})$.
Prediktering:

$$\tilde{u}_{n+1} = 2\cos q\cdot u_n - u_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)(\phi_{n-j}+A^2u_{n-j}) \tag{6.16}$$

Metodens lokale trunkeringsfeil er $O(h^{k+3})=O(h^7)$. Det betyr at:

$$y_{n+1} = 2\cos q\cdot y_n - y_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)(f_{n-j}+A^2y_{n-j}) + C_7y^{(7)}h^7 + O(h^8) \tag{6.17}$$

Korrigering:

$$\begin{aligned} u_{n+1} = {} & 2\cos q\cdot u_n - u_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^{4} \beta_j^*(q)(\phi_{n+1-j}+A^2u_{n+1-j}) \\ & + h^2\beta_0^*(q)(\tilde{\phi}_{n+1}+A^2\tilde{u}_{n+1}) \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned} y_{n+1} = {} & 2\cos q\cdot y_n - y_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j^*(q)(f_{n+1-j}+A^2u_{n+1-j}) \\ & + C_7^*(q)y^{(7)}h^7 + O(h^8) \end{aligned} \tag{6.19}$$

<u>Definisjon 6.2.</u> *Den <u>globale trunkeringsfeil</u> for en numerisk metode er differansen mellom numerisk og eksakt løsning når en ser bort fra avrundingsfeil.*

Den globale trunkeringsfeil e_n til metoden er $O(h^{k+1}) = O(h^5)$ ifølge |1,Chap.6|. Definerer derfor $\varepsilon(t)$ ved:

$$h^5\varepsilon(t_n) + O(h^6) \equiv e_n = u_n - y_n \tag{6.20}$$

Antar at $\varepsilon(t)$ er kontinuerlig deriverbar. En har da fra (6.16) og (6.17):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} - y_{n+1} = {} & 2\cos q\cdot e_n + e_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)(\phi_{n-j}-f_{n-j}+A^2(u_{n-j}-y_{n-j})) \\ & - C_7y^{(7)}h^7 + O(h^8) \end{aligned} \tag{6.21}$$

$$= 2\cos q\cdot e_n - e_{n-1} + h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)(f_y(\tau_{n-j})\cdot e_{n-j} + A^2 e_{n-j}) \tag{6.22}$$

$$-C_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8)$$

hvor τ_n er slik at $y(\tau_n) \in [u_n, y_n]$ og $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$.
Tilsvarende fra (6.18) og (6.19):

$$u_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q\cdot e_n - e_{n-1} + h^2 \sum_{j=1}^{4} \beta_j^*(q)(f_y(\tau_{n+1-j})\cdot e_{n+1-j}$$

$$+A^2 e_{n+1-j}) \tag{6.24}$$

$$+h^2 \beta_0^*(q)(f_y(\tau_{n+1}) + A^2)(\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1}) - C_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8)$$

En har at:

$$\varepsilon(t_{n-j}) = \varepsilon(t_n) + O(h) \tag{6.25}$$

$$\varepsilon(t_{n+1-j}) = \varepsilon(t_n) + O(h) \tag{6.26}$$

$$y(\tau_{n-j}) = y(t_n) + O(h) \tag{6.27}$$

$$f_y(\tau_{n-j}) = f_y(t_n) + O(h) \tag{6.28}$$

Videre har en at:

$$\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1} = \tilde{u}_{n+1} - u_{n+1} + u_{n+1} - y_{n+1} \tag{6.29}$$

$$= Ch^7 + e_{n+1} \tag{6.30}$$

$$= h^5 \varepsilon(t_{n+1}) + O(h^6) \tag{6.31}$$

Herav kan en forenklet sette:

$$\tilde{u}_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q\cdot e_n - e_{n-1} + h^7 \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)(f_y(t_n) + A^2)\varepsilon(t_n) \tag{6.32}$$

$$-C_7 y^{(7)} h^7 + O(h^8)$$

$$u_{n+1} - y_{n+1} = 2\cos q\cdot e_n - e_{n-1} + h^7 \sum_{j=0}^{4} \beta_j^*(q)(f_y(t_n) + A^2)\varepsilon(t_n) \tag{6.33}$$

$$-C_7^* y^{(7)} h^7 + O(h^8)$$

Subtraherer (6.32) fra (6.33):

$$u_{n+1}-\tilde{u}_{n+1} = h^7 \sum_{j=0}^{4}(\beta_j^*(q)-\beta_j(q))(f_y(t_n)+A^2)\varepsilon(t_n)$$
$$-(C_7^*-C_7)y^{(7)}h^7 + O(h^8) \qquad (6.34)$$

I følge kapittel 2 er metoden slik at den integrerer eksakt (bortsett fra avrundingsfeil) problemer av typen

$$y'' + A^2y = p_4(t) \qquad (6.35)$$

når A^2 er konstant. Spesielt integrerer den eksakt når $p_4(t) \triangleq 1$. En kan da sette:

$$y_{n+1}-2\cos q\cdot y_n+y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j(q)\cdot 1 \qquad (6.36)$$

$$y_{n+1}-2\cos q\cdot y_n+y_{n-1} = h^2 \sum_{j=0}^{4} \beta_j^*(q)\cdot 1 \qquad (6.37)$$

Herav følger at:

$$\sum_{j=0}^{4} \beta_j(q) = \sum_{j=0}^{4} \beta_j^*(q) \qquad (6.38)$$

(6.38) innsatt i (6.34) gir da forenklet:

$$u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1} = -(C_7^* - C_7)y^{(7)}h^7 + O(h^8) \qquad (6.39)$$

En har da:

$$y^{(7)}h^7 = \frac{u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}}{C_7 - C_7^*} + O(h^8) \qquad (6.43)$$

Lokal trunkeringsfeil for metoden følger da med (6.43) innsatt i (6.33):

$$d_{n+1} = C_7^*y^{(7)}h^7 + O(h^8) = \frac{C_7^*}{C_7-C_7^*}(u_{n+1}-\tilde{u}_{n+1}) + O(h^8) \qquad (6.44)$$

Fra |1,s.297|: $C_7 = \frac{3}{40}$, $C_7^* = -\frac{1}{240}$.

Herav:

$$d_{n+1} = -\frac{1}{19}(u_{n+1} - \tilde{u}_{n+1}) + O(h^8) \qquad (6.45)$$

Å finne et godt estimat på den globale trunkeringsfeil er generelt meget vanskelig. I vårt tilfelle ville det naturlige kanskje være å bruke

$$e_n \sim C \cdot \frac{d_n}{h^2}$$

der C velges gjennom eksperimenter slik at den reelle globale feil kommer under eps. Det er imidlertid grunn til å tro at C varierer så sterkt fra problem til problem at en at en ofte kommer ut for tilfelle der den globale feil med en fast C som skal gjelde for et vidt spektrum av problemer blir grovt overestimert. En får en for nøyaktig løsning og må betale dyrt for ekstra sifre som en ikke har bruk for eller ikke kan ha tillit til, eller en får ikke noe resultat i det hele tatt. Vi vil derfor i rutinene i stedet bruke $\frac{d_n}{h}$ som "estimat" på global trunkeringsfeil.

6.4. Startmetode.

Initialbetingelsene er gitt ved løsningsvektorfunksjonen og dens deriverte i startpunktet. Vi trenger derfor en enskritts startmetode for vår flerskrittsmetode. Som slik startmetode bruker vi en Nyströmmetode av orden 5 |1,s.173|. På autonom form:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{f}(\vec{u}_n) \\
\vec{k}_2 &= \vec{f}(\vec{u}_n + \tfrac{2}{5}h\vec{u}'_n + \tfrac{2}{25}h^2\vec{k}_1) \\
\vec{k}_3 &= \vec{f}(\vec{u}_n + \tfrac{2}{3}h\vec{u}'_n + \tfrac{2}{9}h^2\vec{k}_1) \\
\vec{k}_4 &= \vec{f}(\vec{u}_n + \tfrac{4}{5}h\vec{u}'_n + \tfrac{4}{25}h^2(\vec{k}_1+\vec{k}_2)) \\
\vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_n + h\vec{u}'_n + \frac{h^2}{192}(23\vec{k}_1+75\vec{k}_2-27\vec{k}_3+25\vec{k}_4) \\
\vec{u}'_{n+1} &= \vec{u}'_n + \frac{h}{192}(23\vec{k}_1+125\vec{k}_2-81\vec{k}_3+125\vec{k}_4)
\end{aligned} \tag{6.49}$$

De problemer vi skal løse er imidlertid generelt ikke på autonom form. (6.49) omformes til ikke-autonom form ved å utvide $\vec{y}$ med et element t til $\vec{Y}$:

$$\vec{Y} \equiv \begin{pmatrix} \vec{y} \\ t \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

Herav:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} \vec{y}' \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.52}$$

$$\vec{Y}'' = \begin{pmatrix} \vec{y}'' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}(t,\vec{y}) \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \vec{F}(\vec{Y}) \tag{6.53}$$

Definerer $\vec{U}_n$, $\vec{U}'_n$, $\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$, $\vec{K}_3$ og $\vec{K}_4$ tilsvarende.

Anvendes så (6.49) på det autonome system $\vec{Y}'' = \vec{F}(\vec{Y})$ fås:

$$\vec{K}_1 = \vec{F}(\vec{U}_n) \tag{6.54}$$

$$= \vec{F}\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_n \\ t_n \end{pmatrix}\right) \tag{6.55}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}(t_n,\vec{u}_n) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{k}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.57}$$

$$\vec{K}_2 = \vec{F}(\vec{U}_n + \frac{2}{5}h\vec{U}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{K}_1) \tag{6.58}$$

$$= \vec{F}\left(\begin{pmatrix} \vec{u}_n + \frac{2}{5}h\vec{u}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1 \\ t_n + \frac{2}{5}h\cdot 1 + \frac{2}{25}h^2\cdot 0 \end{pmatrix}\right) \tag{6.59}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}(t_n + \frac{2}{5}h \; , \; \vec{u}_n + \frac{2}{5}h\vec{u}'_n + \frac{2}{25}h^2\vec{k}_1) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.60}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec{k}_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.61}$$

Fortsettes tilsvarende fås til slutt:

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 &= \vec{f}(t_n, \vec{u}_n) \\
\vec{k}_2 &= \vec{f}(t_n + \tfrac{2}{5}h \; , \; \vec{u}_n + \tfrac{2}{5}h\vec{u}'_n + \tfrac{2}{25}h^2\vec{k}_1) \\
\vec{k}_3 &= \vec{f}(t_n + \tfrac{2}{3}h \; , \; \vec{u}_n + \tfrac{2}{3}h\vec{u}'_n + \tfrac{2}{9}h^2\vec{k}_1) \\
\vec{k}_4 &= \vec{f}(t_n + \tfrac{4}{5}h \; , \; \vec{u}_n + \tfrac{4}{5}\vec{u}'_n + \tfrac{4}{25}h^2(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)) \\
\vec{u}_{n+1} &= \vec{u}_n + h\vec{u}'_n + \frac{h^2}{192}(23\vec{k}_1 + 75\vec{k}_2 - 27\vec{k}_3 + 25\vec{k}_4) \\
\vec{u}'_{n+1} &= \vec{u}'_n + \frac{h}{192}(23\vec{k}_1 + 125\vec{k}_2 - 81\vec{k}_3 + 125\vec{k}_4)
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Dette er Nyströms 5.ordens metode på ikke-autonom form som vi vil bruke som startintegrasjonsmetode.

6.5. Valg av skritt for startintegrasjonen.

Skrittet reguleres før selve startintegrasjonen på følgende måte:

1. Integrer med det av brukeren spesifiserte initielle skritt h fra startpunkt a til a+h. Resultat: $\vec{u}_1^*$.
2. Integrer med skritt $\frac{h}{2}$ fra a til a+h. Resultat: $\vec{u}_1$.
3. Estimer h_{ny} på grunnlag av differansen mellom $\vec{u}_1^*$ og $\vec{u}_1$ slik at h_{ny} gir estimert global trunkeringsfeil lik eps etter ett skritt.
4. Bruk $\frac{1}{2}h_{ny}$ ved startintegrasjonen.

Metoden er av 5. orden. Det vil i følge definisjonen av orden si at den lokale trunkeringsfeil er $O(h^7)$. Det vil si:

$$||\vec{u}_1^* - \vec{y}_1||_\infty = K\cdot h^7 + O(h^8) \tag{6.63}$$

$$||\vec{u}_{\frac{1}{2}} - \vec{y}_{\frac{1}{2}}||_\infty = K(\tfrac{h}{2})^7 + O(h^8) \tag{6.64}$$

$$||\vec{u}_1 - \vec{y}_1||_\infty \approx 2K(\tfrac{h}{2})^7 + O(h^8) \tag{6.65}$$

Tilnærmingstegnet i siste relasjon skyldes at en bruker $\vec{u}_{\frac{1}{2}}$ og $\vec{u}'_{\frac{1}{2}}$ og ikke $\vec{y}_{\frac{1}{2}}$ og $\vec{y}'_{\frac{1}{2}}$ til beregning av $\vec{u}_1$ og at integrasjonsintervallet er forskjøvet. Feilen i $\vec{u}_1$ blir derfor en mellomting mellom lokal og global trunkeringsfeil. Den siste er $O(h^5)$ |1,s.177|. Ved estimeringen vil vi derfor istedenfor (6.63) og (6.65) bruke:

$$||\vec{u}_1^* - \vec{y}_1||_\infty \approx K\cdot h^6 \tag{6.63*}$$

og

$$||\vec{u}_1 - \vec{y}_1||_\infty \approx 2K(\tfrac{h}{2})^6 \tag{6.65*}$$

Det gir da:

$$||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_\infty \leq ||\vec{u}_1^* - \vec{y}_1||_\infty + ||\vec{y}_1 - \vec{u}_1||_\infty \tag{6.66}$$

$$\approx K\cdot h^6(1+\tfrac{2}{64}) \tag{6.67a}$$

$$= \frac{33}{32}K\cdot h^6 \tag{6.67b}$$

Det vil si:

$$K \gtrsim \frac{32}{33}||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_\infty \cdot h^{-6} \tag{6.68}$$

h_{ny} er altså gitt ved:

$$||\vec{u}_1^* - \vec{y}_1||_{\infty,ny} = K\cdot h_{ny}^2 \approx eps \tag{6.69}$$

$$h_{ny}^6 \approx \frac{eps}{K} \tag{6.70}$$

$$\lesssim \frac{eps}{\frac{32}{33}||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_\infty h^{-6}} \tag{6.71}$$

Altså:

$$h_{ny} \approx h\sqrt[6]{\frac{33eps}{32||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_\infty}} \tag{6.73}$$

Vi velger å bruke

$$h_{start} = \frac{1}{2}h\sqrt[6]{\frac{eps}{||\vec{u}_1^* - \vec{u}_1||_\infty}} \tag{6.74}$$

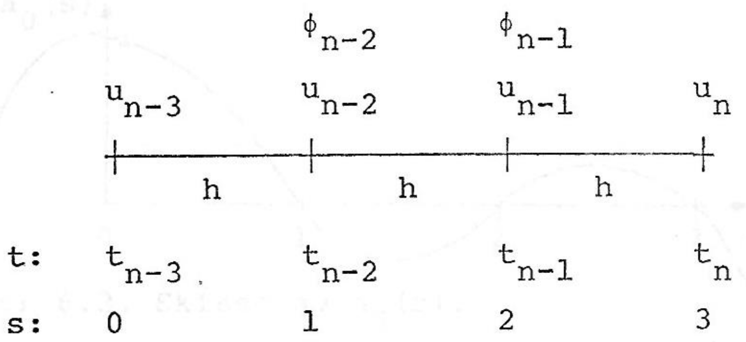
dersom $h_{start} \leq 4h$, ellers brukes $h_{start} = 4h$.

6.6. Polynomisk interpolasjon for PER og SC4.

I PER og SC4 beregnes løsningen i vilkårlige punkter ved polynomisk interpolasjon. Denne brukes ved halvering av skrittet og ved utskrift i ønskete punkter. Siden metoden gir global trunkeringsfeil lik $O(h^5)$, trenges et 5.grads interpolasjonspolynom for at feilen ved interpolasjonen skal være av samme orden som de størrelser som inngår i interpolasjonsformelen. Denne må da baseres på minst 6 verdier av u eller ϕ. Det naturlige valg er u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ϕ_n, ϕ_{n-1} og ϕ_{n-2}. Det viser seg imidlertid at det er umulig å konstruere et 5.grads interpolasjonspolynom basert på disse verdiene. Erstatter derfor ϕ_n med u_{n-3} (figur 6.1). En får da følgende interpolasjonspolynom:

$$\tilde{p}(t) = \sum_{i=0}^{3} \tilde{a}_i(t) u_{n-3+i} + \sum_{i=1}^{2} \tilde{b}_i(t) \phi_{n+3-i} \tag{6.75}$$

(Regner skalart i dette avsnitt.)



Figur 6.1. Interpolasjonspunkter og -verdier.

$\tilde{p}(t)$ skal oppfylle følgende betingelser:

$$\tilde{p}(t_{n-3+i}) = u_{n-3+i}\ , \quad i = 0(1)3 \tag{6.76}$$

$$\tilde{p}''(t_{n-3+i}) = \phi_{n-3+i}\ , \quad i = 1,2 \tag{6.77}$$

Skalerer t til s:

$$s \equiv \frac{t-t_{n-3}}{h} \tag{6.78}$$

Interpolasjonspolynomet kan da uttrykkes slik i den nye variable:

$$p(s) = \sum_{i=0}^{3} a_i(s)u_{n-3+i} + h^2 \sum_{i=1}^{2} b_i(s)\phi_{n-3+i} \tag{6.79}$$

p(s) må da tilsvarende oppfylle følgende betingelser:

$$p(i) = \tilde{p}(t_{n-3+i}) = u_{n-3+i} \quad , \; i = 0(1)3 \tag{6.80}$$

$$p''(i) = \tilde{p}''(t_{n-3+i})\frac{d^2t}{ds^2} = \phi_{n-3+i}\cdot h^2 \quad , \; i = 1,2 \tag{6.81}$$

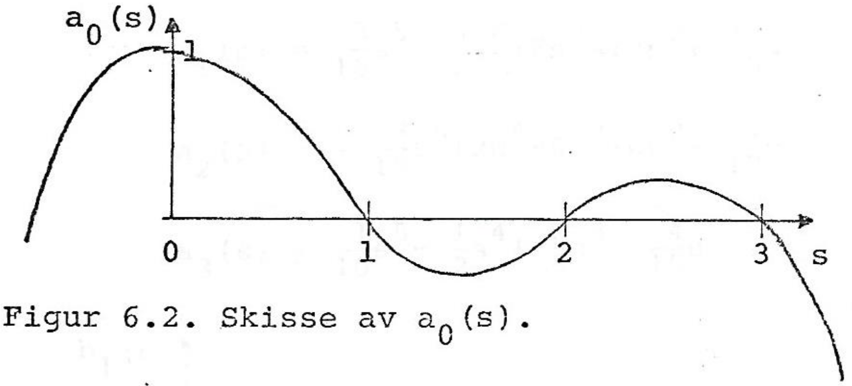
Herav følger betingelsene:

$$a_j(i) = \delta_{ij} \quad , \; i,j = 0(1)3 \tag{6.82}$$

$$b_j(i) = 0 \quad , \; i = 0(1)3 \; , \; j = 1,2 \tag{6.83}$$

$$a_j''(i) = 0 \quad , \; i = 1,2 \; , \; j = 0(1)3 \tag{6.84}$$

$$b_j''(i) = \delta_{ij} \quad , \; i,j = 1,2 \tag{6.85}$$



Figur 6.2. Skisse av $a_0(s)$.

Fra (6.84) og kravet om 5.gradspolynom har en at:

$$a_0''(s) = (s-1)(s-2)(cs+d) \tag{6.86}$$

Integrert:

$$a_0(s) = \frac{c}{20}s^5 + \frac{d-3c}{12}s^4 + \frac{2c-3d}{6}s^3 + ds^2 + es + f \tag{6.87}$$

(6.82) anvendt på (6.87) gir følgende likningssystem:

$$f = 1$$

$$\frac{2}{15}c + \frac{7}{12}d + e + f = 0$$

$$\frac{4}{15}c + \frac{4}{3}d + 2e + f = 0 \qquad (6.88)$$

$$\frac{9}{10}c + \frac{9}{4}d + 3e + f = 0$$

Løsningen av (6.88) er:

$$c = -2 \ , \ d = 6 \ , \ e = -\frac{127}{30} \ , \ f = 1$$

Innsatt i (6.87) gir det:

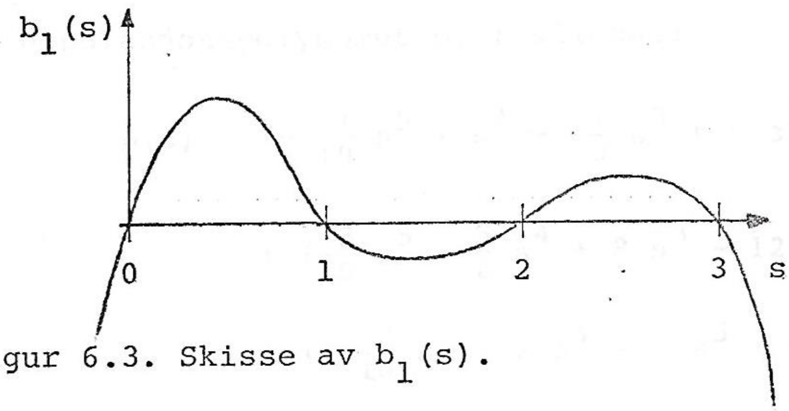
$$a_0(s) = -\frac{1}{10}s^5 + s^4 - \frac{11}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{127}{30}s + 1 \qquad (6.89)$$

Tilsvarende fås:

$$a_1(s) = \frac{3}{10}s^5 - \frac{5}{2}s^4 + 8s^3 - 12s^2 + \frac{36}{5}s \qquad (6.90)$$

$$a_2(s) = -\frac{3}{10}s^5 + 2s^4 - 5s^3 + 6s^2 - \frac{27}{10}s \qquad (6.91)$$

$$a_3(s) = \frac{1}{10}s^5 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{3}s^3 - \frac{4}{15}s \qquad (6.92)$$



Figur 6.3. Skisse av $b_1(s)$.

Fra (6.85) fås:

$$b_1''(s) = (s-2)(cs^2 + ds + e) \qquad (6.93)$$

Integrert:

$$b_1(s) = \frac{c}{20}s^5 + \frac{d-2c}{12}s^4 + \frac{e-2d}{6}s^3 - es^2 + fs + g \qquad (6.94)$$

Fra (6.83) og (6.85) fås følgende likningssystem:

$$-c - d - e = 1$$

$$g = 0$$

$$\frac{c}{20} + \frac{d-2c}{12} + \frac{e-2d}{6} - e + f = 0 \qquad (6.95)$$

$$32\frac{c}{20} + 16\frac{d-2c}{12} + 8\frac{e-2d}{6} - 4e + 2f = 0$$

$$243\frac{c}{20} + 81\frac{d-2c}{12} + 27\frac{e-2d}{6} - 9e + 3f = 0$$

Løsning:

$$c = 2\ ,\ d = -8\ ,\ e = 5\ ,\ f = \frac{12}{5}\ ,\ g = 0$$

Innsatt i (6.94):

$$b_1(s) = \frac{1}{10}s^5 - s^4 + \frac{7}{2}s^3 - 5s^2 + \frac{12}{5}s \qquad (6.96)$$

Analogt fås:

$$b_2(s) = -\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{5}s \qquad (6.97)$$

Interpolasjonspolynomet blir således:

$$\begin{aligned} p(s) = {} & (-\frac{1}{10}s^5 + s^4 - \frac{11}{3}s^3 + 6s^2 - \frac{127}{30}s + 1)\, u_{n-3} \\ & + (\frac{3}{10}s^5 - \frac{5}{2}s^4 + 8s^3 - 12s^2 + \frac{36}{5}s)\, u_{n-2} \\ & + (-\frac{3}{10}s^5 + 2s^4 - 5s^3 + 6s^2 - \frac{27}{10}s)\, u_{n-1} \\ & + (\frac{1}{10}s^5 - \frac{1}{2}s^4 + \frac{2}{3}s^3 - \frac{4}{15}s)\, u_n \\ & + (\frac{1}{10}s^5 - s^4 + \frac{7}{2}s^3 - 5s^2 + \frac{12}{5}s)\, h^2 \cdot \phi_{n-2} \\ & + (-\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{2}s^4 - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{5}s)\, h^2 \cdot \phi_{n-1} \end{aligned} \qquad (6.98)$$

eller delvis faktorisert:

$$
\begin{aligned}
p(s) = & -\frac{1}{30}(3s^2 - 12s + 5)(s-1)(s-2)(s-3)u_{n-3} \\
& + \frac{1}{10}(3s^2 - 10s + 12)s(s-2)(s-3)u_{n-2} \\
& - \frac{1}{10}(3s^2 - 8s + 9)s(s-1)(s-3)u_{n-1} \\
& + \frac{1}{30}(3s^2 - 6s - 4)s(s-1)(s-2)u_n \\
& + \frac{1}{10}s(s-1)(s-2)(s-3)(s-4)h^2 \cdot \phi_{n-2} \\
& - \frac{1}{10}(s+1)s(s-1)(s-2)(s-3)h^2 \cdot \phi_{n-1}
\end{aligned}
\tag{6.99}
$$

Ønsker nå å finne feilleddspolynomet C(s) i interpolasjons-polynomet. En har at:

$$
\begin{aligned}
& C(s)y^{(6)}(t) \cdot h^6 + O(h^7) \\
& = p(s)\Big|_{\substack{u=y \\ \phi=f}} - y(t+(s-3)h)
\end{aligned}
\tag{6.100}
$$

$$
\begin{aligned}
& = a_0(s)\frac{y^{(6)}}{6!}(-3h)^6 + a_1(s)\frac{y^{(6)}}{6!}(-2h)^2 + a_2(s)\frac{y^{(6)}}{6!}(-h)^6 \\
& \quad + a_3(s) \cdot 0 + b_1(s)\frac{y^{(6)}}{4!}(-2h)^4h^2 + b_2(s)\frac{y^{(6)}}{4!}(-h)^4h^2 \\
& \quad - \frac{1}{6!}y^{(6)}(s-3)^6h^6 + O(h^7)
\end{aligned}
\tag{6.101}
$$

$$
= \frac{729a_0(s)+64a_1(s)+a_2(s)+480b_1(s)+30b_2(s)-(s-3)^6}{6!}y^{(6)}h^6 + O(h^7)
\tag{6.102}
$$

Herav fås:

$$
C(s) = \frac{-s^6 + 9s^5 - 29s^4 + 39s^3 - 18s^2}{6!}
\tag{6.103}
$$

$6! \cdot C(s)$ er skissert i figur 6.4.

Hvis en nå erstatter ϕ_{n-2} med ϕ_n og konstruerer et interpolasjonspolynom $p^*(s)$ basert på u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-3}, ϕ_n og ϕ_{n-1}, skulle det ikke være urimelig å vente at feilleddspolynomet $C^*(s)$ i dette tilfelle har mindre maksimumsnorm enn $C(s)$ i intervallet $[2,3]$. Dette viser seg imidlertid ikke å være tilfelle. (Se figur 6.4.) Vi vil derfor bruke $p(s)$ i PER og SC4. I PERDIAG brukes interpolasjonsformelen gitt ved (2.127-132).

Vi finner at

$$p^*(s) = \sum_{i=0}^{3} a_i^*(s)u_{n-3+i} + h^2 \sum_{i=2}^{3} b_i^*(s)\phi_{n-3+i} \tag{6.104}$$

$$\begin{aligned} &= (-\tfrac{1}{10}s^5 + s^4 - \tfrac{11}{3}s^3 + 6s^2 - \tfrac{127}{30}s + 1)u_{n-3} \\ &+(\tfrac{3}{2}s^5 - \tfrac{29}{2}s^4 + 50s^3 - 72s^2 + 36s)u_{n-2} \\ &+(-\tfrac{27}{10}s^5 + 26s^4 - 89s^3 + 126s^2 - \tfrac{603}{10}s)u_{n-1} \\ &+(\tfrac{13}{10}s^5 - \tfrac{25}{2}s^4 + \tfrac{128}{3}s^3 - 60s^2 + \tfrac{428}{15}s)u_n \\ &+(-\tfrac{11}{10}s^5 + \tfrac{21}{2}s^4 - \tfrac{71}{2}s^3 + \tfrac{99}{2}s^2 - \tfrac{117}{5}s)h^2\cdot\phi_{n-1} \\ &+(-\tfrac{1}{10}s^5 + s^4 - \tfrac{7}{2}s^3 + 5s^2 - \tfrac{12}{5}s)h^2\cdot\phi_n \, . \end{aligned} \tag{6.105}$$

Feilpolynomberegning:

$$p^*(s)\Big|_{\substack{u=y\\ \phi=f}} - y(t+(s-3)h) = C^*(s)y^{(6)}(t)h^6 + O(h^7) \tag{6.106}$$

$$\begin{aligned} &= a_0^*(s)\frac{y^{(6)}}{6!}(-3h)^6 + a_1^*(s)\frac{y^{(6)}}{6!}(-2h)^6 + a_2^*(s)\frac{y^{(6)}}{6!}(-h)^6 \\ &+ a_3^*(s)\cdot 0 + b_2^*(s)h^2\,\frac{y^{(6)}}{4!}(-h)^4 + b_3^*(s)\cdot 0 \\ &- \frac{1}{6!}y^{(6)}(s-3)^6h^6 + O(h^7) \end{aligned} \tag{6.107}$$

$$= \frac{729a_0^*(s)+64a_1^*(s)+a_2^*(s)+30b_2^*(s)-(s-3)^6}{6!}\,y^{(6)}h^6 + O(h^7) \tag{6.108}$$

Herav:

$$C^*(s) = \frac{-s^6 + \frac{27}{5}s^5 + 7s^4 - 87s^3 + 162s^2 - \frac{432}{5}s}{6!} \tag{6.109}$$

$6!\cdot C^*(s)$ er skissert i figur 6.4 sammen med $6!\cdot C(s)$.

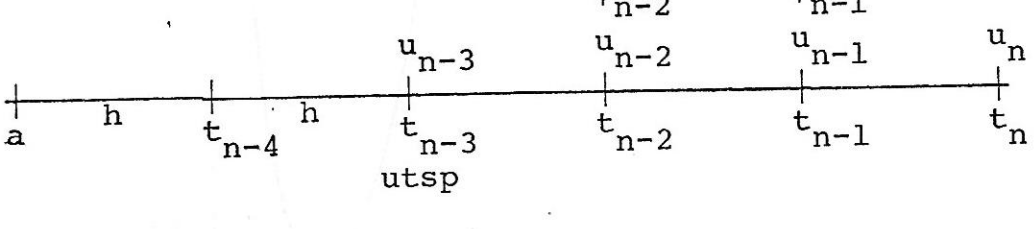
$p(s)$ brukes også når en ved halvering av skrittet skal beregne $u_{n-\frac{1}{2}}$ og $u_{n-\frac{3}{2}}$. Disse svarer henholdsvis til $s=\frac{5}{2}$ og $s=\frac{3}{2}$.

Ved innsetting i (6.99) fås:

$$\begin{aligned} u_{n-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{64}(5u_{n-3} + 27u_{n-2} + 27u_{n-1} + 5u_n) \\ &\quad - \frac{9}{64}h^2(\phi_{n-2} + \phi_{n-1}) \end{aligned} \tag{6.110}$$

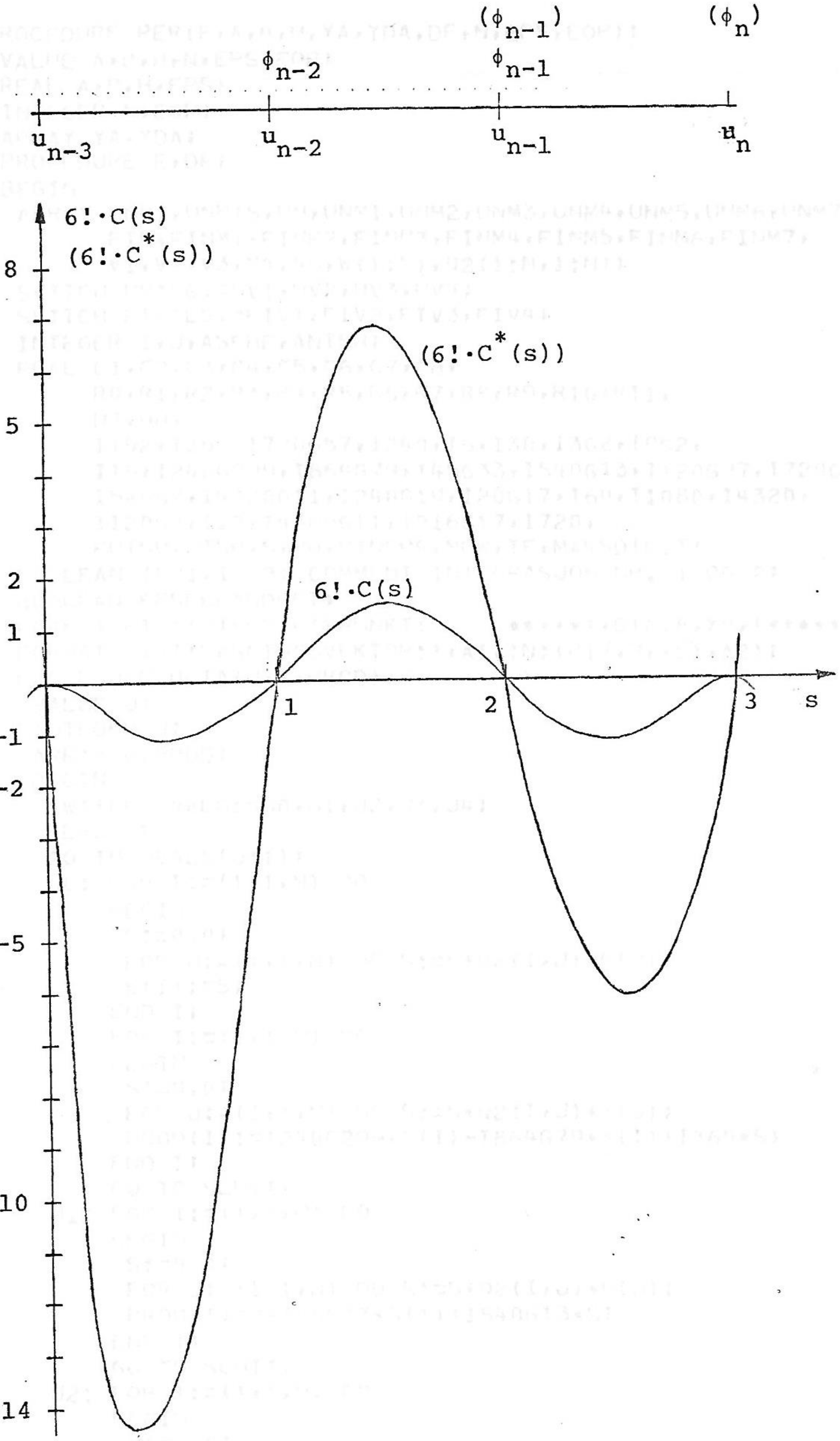
$$\begin{aligned} u_{n-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{64}(-5u_{n-3} - 23u_{n-2} + 93u_{n-1} - u_n) \\ &\quad + \frac{h^2}{64}(9\phi_{n-2} + 21\phi_{n-1}) \end{aligned} \tag{6.111}$$

For at interpolasjonsfeilen skal bli minst mulig, bør utskriftspunktet utsp ligge i intervallet $[t_{n-3},t_n]$. Under startintegrasjonen foretas ingen interpolasjon for utskrift. Dette skjer først etter at ett skritt er tatt med hovedintegrasjonen (TTS_4-TTC_4). For at utsp skal ligge i $[t_{n-3},t_n]$ bør en derfor velge $h_{start} = \frac{1}{2}(\text{utsp} - a)$ dersom h_{start} etter de andre kriteriene referert tidligere er spesifisert større enn $\frac{1}{2}(\text{utsp} - a)$. (a er startpunktet av integrasjonen.) I dette tilfelle vil situasjonen ved første utskriftsinterpolasjon være som angitt i figur 6.5.



Figur 6.5.

Utskrift av PER, PERDIAG og SC4 avslutter dette kapittel.



Figur 6.4. Feilleddspolynomer.

6.7. Utskrift av PER.

```
ET*GIP.PER
PROCEDURE PER(F,A,B,H,YA,YDA,DF,N,EPS,EOP);
 VALUE A,B,H,N,EPS,EOP;
 REAL A,B,H,EPS;
 INTEGER N,EOP;
 ARRAY YA,YDA;
 PROCEDURE F,DF;
 BEGIN
  ARRAY UNP1,UNP1S,UN,UNM1,UNM2,UNM3,UNM4,UNM5,UNM6,UNM7,
        FIN,FINM1,FINM2,FINM3,FINM4,FINM5,FINM6,FINM7,
        V1,V2,V3,V4,V5,W(1:N),Q2(1:N,1:N);
  SWITCH UVALG:=UV1,UV2,UV3,UV4;
  SWITCH FIVALG:=FIV1,FIV2,FIV3,FIV4;
  INTEGER I,J,ASEHE,ANTMH;
  REAL C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,
       R0,R1,R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,R10,R11,
       H2,HH,
       I192,I360,I720G57,I240,I6,I30,I3G2,I9G2,
       I19,I240G299,I864G79,I45G33,I540G13,I120G97,I720G19,I5G2,I
       I540G7,I4320G11,I240G19,I20G17,I60,I1080,I4320,
       I120G7,I12,I4360G11,I216G17,I720,
       FUTSP,UTSP,S,MH,MINEPS,MUW,TF,MAKSDIF,T;
  BOOLEAN INR1,INR2; COMMENT INTEGRASJON NR. 1 OG 2;
  BOOLEAN EPSFORANDRET;
  FORMAT UTT('UTSKRIFTSPUNKT:       *****',D18.8,X8,'*****',A2);
  FORMAT UTV('LØSNINGSVEKTOR:',A1,:N:(R17.9,X5),A2);
  PROCEDURE BETA(J,G,PROD);
   VALUE J;
   INTEGER J;
   ARRAY G,PROD;
   BEGIN
    SWITCH JVALG:=J0,J1,J2,J3,J4;
    REAL S;
    GO TO JVALG(J+1);
    J0: FOR I:=(1,1,N) DO
        BEGIN
         S:=0.0;
         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
         W(I):=S;
        END I;
        FOR I:=(1,1,N) DO
        BEGIN
         S:=0.0;
         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*W(J);
         PROD(I):=I240G299*G(I)-I864G79*W(I)+I360*S;
        END I;
        GO TO SLUTT;
    J1: FOR I:=(1,1,N) DO
        BEGIN
         S:=0.0;
         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
         PROD(I):=-I45G33*G(I)+I540G13*S;
        END I;
        GO TO SLUTT;
    J2: FOR I:=(1,1,N) DO
        BEGIN
         S:=0.0;
         FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
         PROD(I):=I120G97*G(I)-I720G19*S;
        END I;
        GO TO SLUTT;
    J3: FOR I:=(1,1,N) DO
```

```
            BEGIN
             S:=0.0;
             FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
             PROD(I):=-I5G2*G(I)+I540G7*S;
            END I;
            GO TO SLUTT;
        J4: FOR I:=(1,1,N) DO
            BEGIN
             S:=0.0;
             FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
             PROD(I):=I720G57*G(I)-I4320G11*S;
            END I;
        SLUTT:
      END PROCEDURE BETA;
     PROCEDURE BETASTJERNE(J,G,PROD);
      VALUE J;
      INTEGER J;
      ARRAY G,PROD;
      BEGIN
       SWITCH JVALG:=J0,J1,J2,J3,J4;
       REAL S;
       GO TO JVALG(J+1);
       J0: FOR I:=(1,1,N) DO
           BEGIN
            S:=0.0;
            FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
            PROD(I):=I240G19*G(I)-I4320G11*S;
           END I;
           GO TO SLUTT;
       J1: FOR I:=(1,1,N) DO
           BEGIN
            S:=0.0;
            FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
            W(I):=S;
           END I;
           FOR I:=(1,1,N) DO
           BEGIN
            S:=0.0;
            FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*W(J);
            PROD(I):=I20G17*G(I)-I216G17*W(I)+I360*S;
           END I;
           GO TO SLUTT;
       J2: FOR I:=(1,1,N) DO
           BEGIN
           S:=0.0;
           FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
           PROD(I):=I120G7*G(I)-I720*S;
          END I;
          GO TO SLUTT;
       J3: FOR I:=(1,1,N) DO
           BEGIN
            S:=0.0;
            FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
            PROD(I):=I60*G(I)-I1080*S;
           END I;
           GO TO SLUTT;
       J4: FOR I:=(1,1,N) DO
           BEGIN
            S:=0.0;
            FOR J:=(1,1,N) DO S:=S+Q2(I,J)*G(J);
            PROD(I):=-I240*G(I)+I4320*S;
           END I;
```

```
 SLUTT:
END PROCEDURE BETASTJERNE;
PROCEDURE WEIGHT(EOP,U,N,W);
 COMMENT PROSEDYRE SOM OPPRETTER OG OPPDATERER FEILVEKTOREN W;
 VALUE EOP,U,N;
 INTEGER EOP,N;
 ARRAY U,W;
 BEGIN
  SWITCH E:=E1,E2,E3;
  INTEGER I;
  REAL S;
  GO TO E(EOP);
  E1: COMMENT ABSOLUTT;
      FOR I:=(1,1,N) DO W(I):=1.0;
      GO TO SLUTT;
  E2: COMMENT RELATIV;
      FOR I:=(1,1,N) DO
      BEGIN
       S:=ABS(U(I));
       W(I):=IF S LSS &-8 THEN &8 ELSE 1.0/S;
      END I;
      GO TO SLUTT;
  E3: COMMENT BLANDET;
      FOR I:=(1,1,N) DO
      BEGIN
       S:=ABS(U(I));
       W(I):=IF S GTR 1.0 THEN 1.0/S ELSE 1.0;
      END;
  SLUTT:
 END PROCEDURE WEIGHT;
COMMENT
**************************** STARTTEST *******************************
IF EOP NEQ 1 AND EOP NEQ 2 AND EOP NEQ 3 THEN
BEGIN
 WRITE('*** FEILOPSJON MÅ VÆRE 1, 2 ELLER 3.');
 GO TO ENDPROC;
END;
READ(UTSP,NODATA); COMMENT LESER FØRSTE UTSKRIFTSPUNKT;
IF UTSP GTR B+&-7 THEN
BEGIN
 WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.');
 GO TO ENDPROC;
END;
COMMENT
************************** INITIALISERING ****************************
BRUKER EN NYSTRØMMETODE AV ORDEN 5 SOM STARTMETODE.
DETTE ER EN RUNGE-KUTTA-METODE FOR INTEGRASJON AV 2. ORDENS PROBLEMER
*        *          *          *          *          *          *
FØRST BEREGNES ENDEL VERDER SOM SKAL BRUKES OFTE I RUTINEN;
I192:=1.0/192.0;
I360:=1.0/360.0;
I720:=1.0/720.0;
I720G57:=57.0/720.0;
I240:=1.0/240.0;
I6:=1.0/6.0;
I12:=1.0/12.0;
I30:=1.0/30.0;
I3G2:=2.0/3.0;
I9G2:=2.0/9.0;
I19:=1.0/19.0;
I240G299:=299.0/240.0;
I864G79:=79.0/864.0;
```

```
I45G33:=33.0/45.0;
I540G13:=13.0/540.0;
I120G97:=97.0/120.0;
I720G19:=19.0/720.0;
I5G2:=0.4;
I540G7:=7.0/540.0;
I4320G11:=11.0/4320.0;
I240G19:=19.0/240.0;
I4360G11:=11.0/4360.0;
I20G17:=17.0/20.0;
I216G17:=17.0/216.0;
I60:=1.0/60.0;
I1080:=1.0/1080.0;
I4320:=1.0/4320.0;
I120G7:=7.0/120.0;
WRITE(UTT,A);
WRITE(UTV,YA);
FOR I:=(1,1,N) DO UNM4(I):=YA(I);
INR1:=TRUE;
COMMENT  FØRST BEREGNING AV PASSE H;
STARTINTEGRASJON:
H2:=H*H;
C1:=0.4*H;
C2:=0.08*H2;
C3:=I3G2*H;
C4:=I9G2*H2;
C5:=0.8*H;
C6:=0.16*H2;
C7:=I192*H2;
C8:=I192*H;
T:=A;
J:=0;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 UN(I):=YA(I);
 UNM7(I):=YDA(I);
END I;
OPP:
J:=J+1;
F(T,UN,N,V1);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R1:=UN(I);
 R2:=UNM7(I);
 R3:=V1(I);
 V2(I):=R1+C1*R2+C2*R3;
 V3(I):=R1+C3*R2+C4*R3;
 V4(I):=R1+C5*R2+C6*R3;
END I;
F(T+C1,V2,N,V5);
F(T+C3,V3,N,V2);
FOR I:=(1,1,N) DO
V4(I):=V4(I)+C6*V5(I);
F(T+C5,V4,N,V3);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=UN(I);
 R1:=23.0*V1(I);
 R2:=V5(I);
 R3:=V2(I);
  R4:=V3(I);
  R5:=UNM7(I);
```

```
    R6:=UN(I):=R0+H*R5+C7*(R1+75.0*R2-27.0*R3+25.0*R4);
    UNM7(I):=UNM7(I)+C8*(R1+125.0*R2-81.0*R3+125.0*R4);
    IF INR1 THEN GO TO UV3;
    GO TO UVALG(J);
    UV1: UNM3(I):=R6; GO TO UV4;
    UV2: UNM2(I):=R6; GO TO UV4;
    UV3: UNM1(I):=R6; GO TO UV4;
    UV4:
   END I;
   IF INR1 THEN
   BEGIN
    H:=0.5*H;
    INR1:=FALSE;
    INR2:=TRUE;
    GO TO STARTINTEGRASJON;
   END;
   IF INR2 AND J EQL 2 THEN
   BEGIN
    MAKSDIF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNM1(I)-UNM2(I)));
    IF MAKSDIF LSS &-10 THEN
    H:=SQRT(H*EPS)
    ELSE
    BEGIN
     R0:=0.5*(EPS/MAKSDIF)**I6;
     IF R0 GTR 4.0 THEN R0:=4.0;
     H:=H*R0;
    END;
    R0:=UTSP-A;
    IF R0 GTR &-6 AND R0 LSS 2.0*H THEN H:=0.5*R0;
    INR2:=FALSE;
    GO TO STARTINTEGRASJON;
   END;
   FOR I:=(1,1,N) DO
   BEGIN
    GO TO FIVALG(J);
    FIV1: FINM4(I):=V1(I);
    FIV2: FINM3(I):=V1(I);
    FIV3: FINM2(I):=V1(I);
    FIV4: FINM1(I):=V1(I);
   END I;
   T:=T+H;
   IF J LSS 4 THEN GO TO OPP;
   F(T,UN,N,FIN);
   DF(T,UN,N,Q2);
   COMMENT
   *** TEST PA OM H ER LITEN NOK FOR COS-APPROKSIMASJONEN ***;
   R1:=R2:=0.0;
   FOR I:=(1,1,N) DO
   BEGIN
    R0:=0.0;
    FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+ABS(Q2(I,J));
    IF R0 GTR R1 THEN R1:=R0;
    R3:=ABS(UN(I));
    IF R3 GTR R2 THEN R2:=R3;
   END I;
   IF R2 LSS &-10 THEN R2:=&-10;
   IF R1 LSS &-20 THEN GO TO VIDERE;
   R4:=3.16*(EPS/R2)**0.125/SQRT(R1);
   IF H GEQ R4 THEN
   BEGIN
    H:=0.8*R4;
    GO TO STARTINTEGRASJON;
```

```
END;
VIDERE:
FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
HH:=0.5*H;
HOVEDINTEGRASJON:
COMMENT
**************************** PREDIKTERING ****************************
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=R1:=R2:=0.0;
 FOR J:=(1,1,N) DO
  BEGIN
  R0:=R0+Q2(I,J)*UN(J);
  R1:=R1+Q2(I,J)*UNM1(J);
  R2:=R2+Q2(I,J)*UNM2(J);
  END J;
 V1(I):=H2*FIN(I)+R0;
 V2(I):=H2*FINM1(I)+R1;
 V3(I):=H2*FINM2(I)+R2;
END I;
BETA(0,V1,UNP1S);
BETASTJERNE(1,V1,UNP1);
BETA(1,V2,V1);
BETASTJERNE(2,V2,V4);
BETA(2,V3,V2);
BETASTJERNE(3,V3,V5);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 UNP1S(I):=UNP1S(I)+V1(I)+V2(I);
 UNP1(I):=UNP1(I)+V4(I)+V5(I);
 R3:=R4:=0.0;
 FOR J:=(1,1,N) DO
  BEGIN
  R3:=R3+Q2(I,J)*UNM3(J);
  R4:=R4+Q2(I,J)*UNM4(J);
  END J;
 V1(I):=H2*FINM3(I)+R3;
 V2(I):=H2*FINM4(I)+R4;
END I;
BETA(3,V1,V3);
BETASTJERNE(4,V1,V4);
BETA(4,V2,V1);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 UNP1S(I):=UNP1S(I)+V1(I)+V3(I);
 UNP1(I):=UNP1(I)+V4(I);
 R0:=0.0;
 FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+Q2(I,J)*UN(J);
 V1(I):=R0;
END I;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=0.0;
 FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+Q2(I,J)*V1(J);
 V2(I):=R0;
END I;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=0.0;
 FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+Q2(I,J)*V2(J);
 R9:=2.0*UN(I)-V1(I)+I12*V2(I)-I360*R0-UNM1(I);
 UNP1S(I):=UNP1S(I)+R9;
```

```
 UNP1(I):=UNP1(I)+R9;
END I;
COMMENT
*************************** KORRIGERING ****************************
COMMENT LAGRER FI,N+1 I V1;
F(T+H,UNP1S,N,V1);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R10:=0.0;
 FOR J:=(1,1,N) DO R10:=R10+Q2(I,J)*UNP1S(J);
 V1(I):=H2*V1(I)+R10;
END I;
BETASTJERNE(0,V1,V2);
FOR I:=(1,1,N) DO UNP1(I):=UNP1(I)+V2(I);
COMMENT *** HAR NÅ FUNNET KORREKTOREN. ESTIMERER SÅ GLOBAL FEIL. ***
        *** GLOBAL FEIL=LOKAL FEIL/H.                           ***;
WEIGHT(EOP,UN,N,W);
TF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I)-UNP1S(I))*W(I))*I19;
MUW:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I))*W(I));
MINEPS:=1.49&-8*MUW; COMMENT MINSTE EPS EN KAN KREVE;
IF EPS LSS MINEPS THEN
BEGIN
 IF EPSFORANDRET THEN
 BEGIN
  WRITE(<<'*** RUTINEN KREVER NY EPSFORANDRING.',A1,
        '*** DETTE TYDER PÅ STADIG ØKENDE LØSNING,',A1,
        '*** MENS BRUKER ØNSKER ABSOLUTT FEILTESTING.',A1,
        '*** BRUK BLANDET FEIL: EOP=3.',A1.1>>);
  GO TO ENDPROC;
 END;
 EPSFORANDRET:=TRUE;
 EPS:=MINEPS;
 WRITE(<<'*** EPS ER KREVD FOR LITEN FOR DETTE PROBLEMET',A1,
       '*** I FORHOLD TIL DEN GITTE MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
       '*** EPS ER AV RUTINEN FORANDRET TIL ',R10.3,'.',A1.1>>,
     MINEPS);
END;
IF TF/H GTR EPS THEN
BEGIN
 COMMENT
 *** SKRITTET ER FOR STORT OG MÅ HALVERES. ***;
 MH:=1.49&-8*ABS(T);
 COMMENT
 *** MH ER MINSTE TILLATTE H PGA. MASKINNØYAKTIGHETEN. ***;
 IF 0.5*H LSS MH THEN
 BEGIN
  WRITE(<<'*** SKRITTET ER AV RUTINEN KREVD HALVERT.',A1,
        '*** DETTE ER IMIDLERTID UTILRÅDELIG PGA DEN GITTE ',
        'MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
        '*** PRØVER DERFOR MED LITT FOR STORT SKRITT',A1,
        '*** I HÅP OM AT VANSKELIGHETEN ER LOKAL.',A1.1>>);
  ANTMH:=ANTMH+1;
  IF ANTMH GTR 3 THEN
  BEGIN
   WRITE(<<'*** HAR NÅ BRUKT FOR STORT SKRITT 3 GANGER. ',A1,
         '*** DET ER UHOLDBART Å FORTSETTE.',A1.1>>);
   GO TO ENDPROC;
  END;
  GO TO NOCHANGE;
 END
 ELSE ANTMH:=0;
 COMMENT
```

```
*** INTERPOLASJON FOR Å FINNE U,N-1/2 OG U,N-3/2. ***;
R2:=0.140625*H2;
R3:=0.328125*H2;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=0.078125*(UNM3(I)+UN(I))+0.421875*(UNM2(I)+UNM1(I))
    -R2*(FINM2(I)+FINM1(I));
 R1:=-0.078125*UNM3(I)-0.359375*UNM2(I)+1.453125*UNM1(I)
      -0.015625*UN(I)+R2*FINM2(I)+R3*FINM1(I);
 UNM4(I):=UNM2(I);
 UNM3(I):=R0;
 UNM2(I):=UNM1(I);
 UNM1(I):=R1;
 FINM4(I):=FINM2(I);
 FINM2(I):=FINM1(I);
END I;
F(T-HH,UNM1,N,FINM1);
F(T-1.5*H,UNM3,N,FINM3);
ASEHE:=0;
H:=HH;
H2:=H*H;
HH:=0.5*H;
FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=0.25*Q2(I,J);
COMMENT
*** HAR NÅ GJORT KLAR TIL Å INTEGRERE PÅ NYTT MED HALVERT SKRITT. **
GO TO HOVEDINTEGRASJON;
END FOR STOR H
ELSE
IF TF/H LSS 0.005*EPS AND ASEHE GEQ 3 THEN
BEGIN
 COMMENT
 *** SKRITTET VAR FOR LITE OG BØR DOBLES. SKRITTET AKSEPTERES. ***;
 DF(T+H,UNP1,N,Q2);
 COMMENT
 *** TEST PÅ COS-APPROKSIMASJONEN. ***;
 R1:=R2:=0.0;
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  R0:=0.0;
  FOR J:=(1,1,N) DO R0:=R0+ABS(Q2(I,J));
  IF R0 GTR R1 THEN R1:=R0;
  R3:=ABS(UNP1(I));
  IF R3 GTR R2 THEN R2:=R3;
 END I;
 IF R2 LSS &-10 THEN R2:=&-10;
 IF R1 GTR &-20 AND H GEQ 1.58*(EPS/R2)**0.125/SQRT(R1) THEN
 BEGIN
  FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
  GO TO NOCHANGE;
 END;
 HH:=H;
 H:=2.0*H;
 H2:=H*H;
 FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
 F(T+HH,UNP1,N,FIN);
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  UN(I):=UNP1(I);
  UNM2(I):=UNM3(I);
  UNM3(I):=UNM5(I);
  UNM4(I):=UNM7(I);
  FINM2(I):=FINM3(I);
```

```
   FINM3(I):=FINM5(I);
   FINM4(I):=FINM7(I);
  END I;
  ASEHE:=0;
  T:=T+HH;
  GO TO UTSKRIFTSTEST;
  END FOR LITEN H;
 NOCHANGE:
 COMMENT
 *** H ER PASSE STOR ELLER ENDRING ER UMULIG. SKRITTET AKSEPTERES. ***
 LAGRER FI,N+1 I UNM7.;
 ASEHE:=ASEHE+1;
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  UNM7(I):=UNM6(I);
  UNM6(I):=UNM5(I);
  UNM5(I):=UNM4(I);
  UNM4(I):=UNM3(I);
  UNM3(I):=UNM2(I);
  UNM2(I):=UNM1(I);
  UNM1(I):=UN(I);
  UN(I):=UNP1(I);
  FINM7(I):=FINM6(I);
  FINM6(I):=FINM5(I);
  FINM5(I):=FINM4(I);
  FINM4(I):=FINM3(I);
  FINM3(I):=FINM2(I);
  FINM2(I):=FINM1(I);
  FINM1(I):=FIN(I);
 END I;
 T:=T+H;
 F(T,UNP1,N,FIN);
 DF(T,UN,N,Q2);
 FOR I:=(1,1,N) DO FOR J:=(1,1,N) DO Q2(I,J):=-H2*Q2(I,J);
 COMMENT
 *** HAR NÅ TATT ET PASSE SKRITT OG ER KLAR TIL Å TA ET NYTT SKRITT.**
 UTSKRIFTSTEST:
 IF UTSP GTR T THEN GO TO HOVEDINTEGRASJON;
 S:=3.0+(UTSP-T)/H;
 R0:=S+1.0;
 R1:=S-1.0;
 R2:=S-2.0;
 R3:=S-3.0;
 R4:=S-4.0;
 R5:=3.0*S*S;
 R6:=-I30*(R5-12.0*S+5.0)*R1*R2*R3;
 R7:=0.1*(R5-10.0*S+12.0)*S*R2*R3;
 R8:=-0.1*(R5-8.0*S+9.0)*S*R1*R3;
 R9:=I30*(R5-6.0*S-4.0)*S*R1*R2;
 R10:=0.1*H2*S*R1*R2*R3*R4;
 R11:=-0.1*H2*R0*S*R1*R2*R3;
 WRITE(UTT,UTSP);
 WRITE(UTV,FOR I:=(1,1,N) DO
       R6*UNM3(I)+R7*UNM2(I)+R8*UNM1(I)+R9*UN(I)+R10*FINM2(I)
       +R11*FINM1(I));
 FUTSP:=UTSP;
 READ(UTSP,ENDPROC);
 IF UTSP GTR B+&-7 THEN
 BEGIN
  WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.');
  GO TO ENDPROC;
 END;
```

```
    IF FUTSP GTR UTSP THEN
    BEGIN
     WRITE(<<'*** UTSKRIFTSPUNKTENE LIGGER IKKE I STIGENDE REKKEFØLGE.',
            A1,'*** DETTE MEDFØRER REDUSERT NØYAKTIGHET.',A1.1>>);
    END;
    GO TO UTSKRIFTSTEST;
    NODATA: WRITE('*** BRUKER HAR IKKE SPESIFISERT UTSKRIFTSPUNKTER.');
    ENDPROC: WRITE(<<'*** PROCEDURE PER ER TERMINERT.',A2.1>>);
   END PROCEDURE PER;
```

6.8. Utskrift av PERDIAG.

```
ET*DIP.PERDIAG
      PROCEDURE PERDIAG(F,A,B,H,YA,YDA,DF,N,EPS,EOP);
       VALUE A,B,H,N,EPS,EOP;
       REAL A,B,H,EPS;
       INTEGER N,EOP;
       ARRAY YA,YDA;
       PROCEDURE F,DF;
       BEGIN
        ARRAY UNP1,UNP1S,UN,UNM1,UNM2,UNM3,UNM4,UNM5,UNM6,UNM7,
              FIN,FINM1,FINM2,FINM3,FINM4,FINM5,FINM6,FINM7,
              V1,V2,V3,V4,V5,W,Q2(1:N);
        SWITCH UVALG:=UV1,UV2,UV3,UV4;
        SWITCH FIVALG:=FIV1,FIV2,FIV3,FIV4;
        INTEGER I,J,ASEHE,ANTMH;
        REAL2 C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,C9,
              R0,R1,R2,R3,R4,R5,R6,
              K1,K2,K3,K4,K5,K6,K7,K8,K9,K10,K12,K25,
              Q,Q2I,Q4,I06,COSQ,ISINQ,QR,
              I192,I6,I3G2,I9G2,I19,I3G22,I2,I2G3,I12G11,
              I12,I3G10,I6G41,I6G35,I3G64,I3G52,I3,I128G35,
              I3G40,I3G28,I6G17,I6G11,I3G5,I8,I4,
              I64,I32G7,I128G5,I4G3,I8G3,
              I32G5,I128G3,I4G9,
              I32G13,I64G3,I32,I64G13,R,K1MR;
        REAL GN,GNM1,GNM2,GNM3,GNM4,TOCOSQUNMUNM1,
             FUTSP,UTSP,H2,HH,MH,MINEPS,MUW,TF,MAKSDIF,T,
             EK1,EK2,EI3G2,EI9G2,EI192,EK25,EI6,EI4,EI2G3,
             ER,ER0,ER1,ER2,ER3,ER4,ER5,ER6,ER7,ER8,ER9,ER10,ER11,
             BETA0,BETA1,BETA2,BETA3,BETA4,BETAS1,BETAS2,BETAS3,
             EC1,EC2,EC3,EC4,EC5,EC6,EC7,EC8,
             EQ2I,ECOSQ,EISINQ,EQ;
        BOOLEAN INR1,INR2; COMMENT INTEGRASJON NR. 1 OG 2;
        BOOLEAN EPSFORANDRET;
        FORMAT UTT('UTSKRIFTSPUNKT:      *****',D18.8,X8,'*****',A2);
        FORMAT UTV('LØSNINGSVEKTOR:',A1,:N:(R17.9,X5),A2);
        PROCEDURE WEIGHT(EOP,U,N,W);
         COMMENT PROSEDYRE SOM OPPRETTER OG OPPDATERER FEILVEKTOREN W;
         VALUE EOP,U,N;
         INTEGER EOP,N;
         ARRAY U,W;
         BEGIN
          SWITCH E:=E1,E2,E3;
          INTEGER I;
          REAL S;
          GO TO E(EOP);
          E1: COMMENT ABSOLUTT;
              FOR I:=(1,1,N) DO W(I):=EK1;
              GO TO SLUTT;
          E2: COMMENT RELATIV;
              FOR I:=(1,1,N) DO
              BEGIN
               S:=ABS(U(I));
               W(I):=IF S LSS &-8 THEN &8 ELSE EK1/S;
              END I;
              GO TO SLUTT;
          E3: COMMENT BLANDET;
              FOR I:=(1,1,N) DO
              BEGIN
               S:=ABS(U(I));
               W(I):=IF S GTR EK1 THEN EK1/S ELSE EK1;
              END;
          SLUTT:
```

```
 END PROCEDURE WEIGHT;
COMMENT
*************************** STARTTEST ****************************
IF EOP NEQ 1 AND EOP NEQ 2 AND EOP NEQ 3 THEN
BEGIN
 WRITE('*** FEILOPSJON MÅ VÆRE 1, 2 ELLER 3.');
 GO TO ENDPROC;
END;
READ(UTSP,NODATA); COMMENT LESER FØRSTE UTSKRIFTSPUNKT;
IF UTSP GTR B+&-7 THEN
BEGIN
 WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.');
 GO TO ENDPROC;
END;
COMMENT
************************** INITIALISERING **************************
BRUKER EN NYSTRØMMETODE AV ORDEN 5 SOM STARTMETODE.
DETTE ER EN RUNGE-KUTTA-METODE FOR INTEGRASJEN AV 2. ORDENS PROBLEMER
*         *          *          *          *          *          *
FØRST BEREGNES ENDEL VERDER SOM SKAL BRUKES OFTE I RUTINEN;
K1:=1.0&0;
K2:=2.0&0;
K3:=3.0&0;
K4:=4.0&0;
K5:=5.0&0;
K6:=6.0&0;
K7:=7.0&0;
K8:=8.0&0;
K9:=9.0&0;
K10:=10.0&0;
K12:=12.0&0;
K25:=25.0&0;
 I192:=K1/192.0&0;
 I2:=K1/K2;
 I3:=K1/K3;
 I4:=I2*I2;
 I6:=K1/K6;
 I8:=K1/K8;
 I12:=K1/K12;
 I32:=I8*I4;
 I2G3:=I2*K3;
 I128G35:=35.0&0/128.0&0;
 I12G11:=I12*11.0&0;
 I3G2:=K2*I3;
 I9G2:=K2/K9;
 I19:=K1/19.0&0;
 I3G10:=I3*K10;
 I6G41:=I6*41.0&0;
 I6G35:=I6*35.0&0;
 I3G64:=I6*128.0&0;
 I3G52:=I6*104.0&0;
 I3G40:=I6*80.0&0;
 I3G28:=I6*56.0&0;
 I6G17:=I6*17.0&0;
 I6G11:=I6*11.0&0;
 I3G5:=I6*K10;
 I3G22:=22.0&0*I3;
 I64:=K1/64.0&0;
 I64G3:=I64*K3;
 I64G13:=I64*13.0&0;
 I32G13:=I64G13*K2;
 I32G7:=I64*14.0&0;
```

```
 I128G5:=I64*2.5&&0;
 I4G3:=I4*K3;
 I8G3:=I2*I4G3;
 I32G5:=I64*K10;
 I128G3:=I64*1.5&&0;
 I4G9:=I4*K9;
 EK1:=1.0;
 EK2:=2.0;
 EK25:=25.0;
 EI3G2:=2.0/3.0;
 EI2G3:=1.5;
 EI9G2:=2.0/9.0;
 EI192:=1.0/192.0;
 EI6:=1.0/6.0;
 EI4:=1.0/4.0;
 WRITE(UTT,A);
 WRITE(UTV,YA);
 FOR I:=(1,1,N) DO UNM4(I):=YA(I);
 INR1:=TRUE;
 COMMENT FØRST BEREGNING AV PASSE H;
 STARTINTEGRASJON:
 H2:=H*H;
 EC1:=0.4*H;
 EC2:=0.08*H2;
 EC3:=EI3G2*H;
 EC4:=EI9G2*H2;
 EC5:=0.8*H;
 EC6:=0.16*H2;
 EC7:=EI192*H2;
 EC8:=EI192*H;
 T:=A;
 J:=0;
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  UN(I):=YA(I);
  UNM7(I):=YDA(I);
 END I;
 OPP:
 J:=J+1;
 F(T,UN,N,V1);
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  ER1:=UN(I);
  ER2:=UNM7(I);
  ER3:=V1(I);
  V2(I):=ER1+EC1*ER2+EC2*ER3;
  V3(I):=ER1+EC3*ER2+EC4*ER3;
  V4(I):=ER1+EC5*ER2+EC6*ER3;
 END I;
 F(T+EC1,V2,N,V5);
 F(T+EC3,V3,N,V2);
 FOR I:=(1,1,N) DO
 V4(I):=V4(I)+EC6*V5(I);
 F(T+EC5,V4,N,V3);
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  ER0:=UN(I);
  ER1:=23.0*V1(I);
  ER2:=V5(I);
  ER3:=V2(I);
  ER4:=V3(I);
  ER5:=UNM7(I);
```

```
    ER6:=UN(I):=ER0+H*ER5+EC7*(ER1+75.0*ER2-27.0*ER3+K25*ER4);
    UNM7(I):=UNM7(I)+EC8*(ER1+125.0*(ER2+ER4)-81.0*ER3);
    IF INR1 THEN GO TO UV3;
    GO TO UVALG(J);
    UV1: UNM3(I):=ER6; GO TO UV4;
    UV2: UNM2(I):=ER6; GO TO UV4;
    UV3: UNM1(I):=ER6; GO TO UV4;
    UV4:
   END I;
   IF INR1 THEN
   BEGIN
    H:=0.5*H;
    INR1:=FALSE;
    INR2:=TRUE;
    GO TO STARTINTEGRASJON;
   END;
   IF INR2 AND J EQL 2 THEN
   BEGIN
    MAKSDIF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNM1(I)-UNM2(I)));
    IF MAKSDIF LSS &-10 THEN
    H:=SQRT(H*EPS)
    ELSE
    BEGIN
     ER0:=0.5*(EPS/MAKSDIF)**I6;
     IF ER0 GTR 4.0 THEN ER0:=4.0;
     H:=H*ER0;
    END;
    ER0:=UTSP-A;
    IF ER0 GTR &-6 AND ER0 LSS 2.0*H THEN H:=0.5*ER0;
    INR2:=FALSE;
    GO TO STARTINTEGRASJON;
   END;
   FOR I:=(1,1,N) DO
   BEGIN
    GO TO FIVALG(J);
    FIV1: FINM4(I):=V1(I);
    FIV2: FINM3(I):=V1(I);
    FIV3: FINM2(I):=V1(I);
    FIV4: FINM1(I):=V1(I);
   END I;
   T:=T+H;
   IF J LSS 4 THEN GO TO OPP;
   F(T,UN,N,FIN);
   DF(T,UN,N,Q2);
   FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=-H2*Q2(I);
   HH:=0.5*H;
   HOVEDINTEGRASJON:
   COMMENT
   **************************** PREDIKTERING ****************************
   FOR I:=(1,1,N) DO
   BEGIN
    Q2I:=Q2(I);
    EQ2I:=Q2I;
    IF ABS(EQ2I) LSS &-12 THEN
    BEGIN
     WRITE('*** PERDIAG KAN IKKE BRUKES PA PROBLEMER MED');
     WRITE('*** NULLELEMENTER PA JACOBIMATRISEDIAGONALEN.');
     GO TO ENDPROC;
    END;
    Q:=SQRT(Q2I);
    EQ:=Q;
    COSQ:=COS(Q);
```

```
ECOSQ:=COSQ;
Q4:=Q2I*Q2I;
IQ6:=K1/(Q4*Q2I);
GN:=H2*FIN(I)+EQ2I*UN(I);
GNM1:=H2*FINM1(I)+EQ2I*UNM1(I);
GNM2:=H2*FINM2(I)+EQ2I*UNM2(I);
GNM3:=H2*FINM3(I)+EQ2I*UNM3(I);
GNM4:=H2*FINM4(I)+EQ2I*UNM4(I);
TOCOSQUNMUNM1:=EK2*ECOSQ*UN(I)-UNM1(I);
                                      (K2-I6G35*Q2I+K2*Q4)*COSQ);
BETA0:=IQ6*(K2-I6G41*Q2I+K5*Q4-(K2-I6G52*Q2I)*COSQ);
BETA1:=IQ6*(-K8+I3G64*Q2I-K9*Q4+(K8-I3G52*Q2I)*COSQ);
BETA2:=IQ6*(K12-K25*Q2I+K10*Q4-(K12-19.0*Q2I)*COSQ);
BETA3:=IQ6*(K12-K25*Q2I+K10*Q4-(K12-19.0*Q2I)*COSQ);
BETA3:=IQ6*(-K8+I3G40*Q2I-K5*Q4+(K8-I3G28*Q2I)*COSQ);
BETA4:=IQ6*(K2-I6G17*Q2I+Q4-(K2-I6G11*Q2I)*COSQ);
UNP1S(I):=BETA0*GN+BETA1*GNM1+BETA2*GNM2+BETA3*GNM3+BETA4*GNM4
          +TOCOSQUNMUNM1;
V2(I):=IQ6*(K2-I6G17*Q2I+Q4-(K2-I6G11*Q2I)*COSQ);
BETAS1:=IQ6*(-K8+I3G22*Q2I+(K8-I3G10*Q2I-K2*Q4)*COSQ);
BETAS2:=IQ6*(K12-K7*Q2I+Q4-(K12-Q2I)*COSQ);
BETAS3:=IQ6*(-K8+I3G10*Q2I+(K8+I3G2*Q2I)*COSQ);
UNP1(I):=BETAS1*GN+BETAS2*GNM1+BETAS3*(GNM2-EI4*GNM3)
         +TOCOSQUNMUNM1;
END I;
F(T+H,UNP1S,N,V1);
FOR I:=(1,1,N) DO UNP1(I):=UNP1(I)+V2(I)*(H2*V1(I)+Q2(I)*UNP1S(I));
COMMENT *** HAR NÅ FUNNET KORREKTOREN. ESTIMERER SÅ GLOBAL FEIL. ***
        *** GLOBAL FEIL=LOKAL FEIL/H.                             ***;
WEIGHT(EOP,UN,N,W);
TF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I)-UNP1S(I))*W(I))*I19;
MUW:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I))*W(I));
MINEPS:=1.49&-8*MUW; COMMENT MINSTE EPS EN KAN KREVE;
IF EPS LSS MINEPS THEN
BEGIN
 IF EPSFORANDRET THEN
 BEGIN
  WRITE(<<'*** RUTINEN KREVER NY EPSFORANDRING.',A1,
         '*** DETTE TYDER PÅ STADIG ØKENDE LØSNING,',A1,
         '*** MENS BRUKER ØNSKER ABSOLUTT FEILTESTING.',A1,
         '*** BRUK BLANDET FEIL: EOP=3.',A1.1>>);
  GO TO ENDPROC;
 END;
 EPSFORANDRET:=TRUE;
 EPS:=MINEPS;
 WRITE(<<'*** EPS ER KREVD FOR LITEN FOR DETTE PROBLEMET',A1,
        '*** I FORHOLD TIL DEN GITTE MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
        '*** EPS ER AV RUTINEN FORANDRET TIL ',R10.3,'.',A1.1>>,
        MINEPS);
END;
IF TF/H GTR EPS THEN
BEGIN
 COMMENT
 *** SKRITTET ER FOR STORT OG MÅ HALVERES. ***;
 MH:=1.49&-8*ABS(T);
 COMMENT
 *** MH ER MINSTE TILLATTE H PGA. MASKINNØYAKTIGHETEN. ***;
 IF 0.5*H LSS MH THEN
 BEGIN
  WRITE(<<'*** SKRITTET ER AV RUTINEN KREVD HALVERT.',A1,
         '*** DETTE ER IMIDLERTID UTILRÅDELIG PGA DEN GITTE ',
         'MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
         '*** PRØVER DERFOR MED LITT FOR STORT SKRITT',A1,
         '*** I HÅP OM AT VANSKELIGHETEN ER LOKAL.',A1.1>>);
```

```
      ANTMH:=ANTMH+1;
      IF ANTMH GTR 3 THEN
      BEGIN
       WRITE(<<'*** HAR NA BRUKT FOR STORT SKRITT 3 GANGER. ',A1,
               '*** DET ER UHOLDBART Å FORTSETTE.',A1.1>>);
       GO TO ENDPROC;
      END;
      GO TO NOCHANGE;
     END
     ELSE ANTMH:=0;
     COMMENT
     *** INTERPOLASJON FOR Å FINNE U,N-1/2 OG U,N-3/2. ***;
     FOR I:=(1,1,N) DO
     BEGIN
      Q2I:=Q2(I);
      EQ2I:=Q2I;
      Q:=SQRT(Q2I);
      EQ:=0;
      Q4:=Q2I*Q2I;
      IQ6:=K1/(Q2I*Q4);
      QR:=I2*Q;
      ISINQ:=K1/SIN(Q);
      EISINQ:=ISINQ;
      R0:=SIN(QR)*ISINQ;
      ER0:=R0;
      R1:=(K1-COS(Q))*R0;
      R2:=K1-COS(QR);
      R3:=R1+R2;
      R4:=(R0-I2)*Q2I;
      R5:=-R1+R2;
      ER6:=SIN(EQ*EI2G3)*EISINQ;
      C1:=-I12G11*Q2I+K1;
      C2:=Q4+I3G5*Q2I-K4;
      C3:=Q2I+K3;
      C4:=-I2*Q2I+K6;
      C6:=I3*Q2I+K4;
      C7:=I12*Q2I+K1;
      GN:=H2*FIN(I)+EQ2I*UN(I);
      GNM1:=H2*FINM1(I)+EQ2I*UNM1(I);
      GNM2:=H2*FINM2(I)+EQ2I*UNM2(I);
      GNM3:=H2*FINM3(I)+EQ2I*UNM3(I);
      GNM4:=H2*FINM4(I)+EQ2I*UNM4(I);
      UNM4(I):=UNM2(I);
      BETA0:=IQ6*(C1*R3+R4+I128G35*Q4-I8G3*Q2I);
      BETA1:=IQ6*(C2*R3-C3*R4-I32G13*Q4+I2G3*Q2I);
      BETA2:=IQ6*(C4*R3+C3*R4-I64G3*Q4-I4G9*Q2I);
      BETA3:=IQ6*(-C6*R3-R4+I32G7*Q4+I2G3*Q2I);
      BETA4:=IQ6*(C7*R3-I128G5*Q4-I8G3*Q2I);
      ER7:=ER6*UNM1(I)-ER0*UNM2(I)
          +BETA0*GN+BETA1*GNM1+BETA2*GNM2+BETA3*GNM3+BETA4*GNM4;
      BETA0:=IQ6*(C1*R5-R4-I128G5*Q4+I8*Q2I);
      BETA1:=IQ6*(C2*R5+C3*R4-I32*Q4-I2*Q2I);
      BETA2:=IQ6*(C4*R5-C3*R4+I64G13*Q4+I4G3*Q2I);
      BETA3:=IQ6*(-C6*R5+R4-I32G5*Q4-I2*Q2I);
      BETA4:=IQ6*(C7*R5+I128G3*Q4+I8*Q2I);
      ER8:=ER0*(UNM1(I)+UNM2(I))
          +BETA0*GN+BETA1*GNM1+BETA2*GNM2+BETA3*GNM3+BETA4*GNM4;
      UNM2(I):=UNM1(I);
      UNM1(I):=ER7;
      UNM3(I):=ER8;
      FINM4(I):=FINM2(I);
      FINM2(I):=FINM1(I);
```

```
 END I;
 F(T-HH,UNM1,N,FINM1);
 F(T-1.5*H,UNM3,N,FINM3);
 ASEHE:=0;
 H:=HH;
 H2:=H*H;
 HH:=0.5*H;
 FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=0.25*Q2(I);
 COMMENT
 *** HAR NA GJORT KLAR TIL A INTEGRERE PA NYTT MED HALVERT SKRITT. *
 GO TO HOVEDINTEGRASJON;
END FOR STOR H
ELSE
IF TF/H LSS 0.005*EPS AND ASEHE GEQ 3 THEN
BEGIN
 COMMENT
 *** SKRITTET VAR FOR LITE OG BØR DOBLES. SKRITTET AKSEPTERES. ***;
 HH:=H;
 H:=EK2*H;
 H2:=H*H;
 DF(T+HH,UNP1,N,Q2);
 FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=-H2*Q2(I);
 F(T+HH,UNP1,N,FIN);
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  UN(I):=UNP1(I);
  UNM2(I):=UNM3(I);
  UNM3(I):=UNM5(I);
  UNM4(I):=UNM7(I);
  FINM2(I):=FINM3(I);
  FINM3(I):=FINM5(I);
  FINM4(I):=FINM7(I);
 END I;
 ASEHE:=0;
 T:=T+HH;
 GO TO UTSKRIFTSTEST;
 END FOR LITEN H;
NOCHANGE:
COMMENT
*** H ER PASSE STOR ELLER ENDRING ER UMULIG. SKRITTET AKSEPTERES. **
LAGRER FI,N+1 I UNM7.;
ASEHE:=ASEHE+1;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 UNM7(I):=UNM6(I);
 UNM6(I):=UNM5(I);
 UNM5(I):=UNM4(I);
 UNM4(I):=UNM3(I);
 UNM3(I):=UNM2(I);
 UNM2(I):=UNM1(I);
 UNM1(I):=UN(I);
 UN(I):=UNP1(I);
 FINM7(I):=FINM6(I);
 FINM6(I):=FINM5(I);
 FINM5(I):=FINM4(I);
 FINM4(I):=FINM3(I);
 FINM3(I):=FINM2(I);
 FINM2(I):=FINM1(I);
 FINM1(I):=FIN(I);
END I;
T:=T+H;
F(T,UNP1,N,FIN);
```

```
DF(T,UN,N,Q2);
FOR I:=(1,1,N) DO Q2(I):=-H2*Q2(I);
COMMENT
*** HAR NÅ TATT ET PASSE SKRITT OG ER KLAR TIL Å TA ET NYTT SKRITT.**
UTSKRIFTSTEST:
IF UTSP GTR T THEN GO TO HOVEDINTEGRASJON;
R:=K1+(UTSP-T)/H;
 ER:=R;
R2:=I2*R*(R+K1);
R3:=-R2*(R+K2)*I3;
R4:=-R3*(R+K3)*I4;
R5:=K4*R4;
R6:=K3*R3;
C1:=R2-R3-R5;
C2:=K4*R2;
C3:=-K2*R2+R6+K6*R4;
C4:=K6*R2;
C5:=R2-R6-R5;
C6:=R3+R4;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 Q2I:=Q2(I);
 EQ2I:=Q2I;
 Q:=SQRT(Q2I);
 EQ:=Q;
 Q4:=Q2I*Q2I;
 IQ6:=K1/(Q2I*Q4);
 QR:=Q*R;
 ISINQ:=K1/SIN(Q);
 EISINQ:=ISINQ;
 C7:=SIN(QR)*ISINQ;
 EC7:=C7;
 C8:=(K1-COS(Q))*C7+K1-COS(QR);
 C9:=(C7-R)*Q2I;
 ER7:=IQ6*((-I12G11*Q2I+K1)*C8+C9+R4*Q4-R2*Q2I);
 ER8:=IQ6*((Q4+I3G5*Q2I-K4)*C8-(Q2I+K3)*C9+C1*Q4+C2*Q2I);
 ER9:=IQ6*((-I2*Q2I+K6)*C8+(Q2I+K3)*C9+C3*Q4-C4*Q2I);
 ER10:=IQ6*(-(I3*Q2I+K4)*C8-C9+C5*Q4+C2*Q2I);
 ER11:=IQ6*((I12*Q2I+K1)*C8+C6*Q4-R2*Q2I);
 GN:=H2*FIN(I)+EQ2I*UN(I);
 GNM1:=H2*FINM1(I)+EQ2I*UNM1(I);
 GNM2:=H2*FINM2(I)+EQ2I*UNM2(I);
 GNM3:=H2*FINM3(I)+EQ2I*UNM3(I);
 GNM4:=H2*FINM4(I)+EQ2I*UNM4(I);
 V1(I):=EISINQ*(SIN(EQ*(ER+1.0)))*UNM1(I)-EC7*UNM2(I)
        +ER7*GN+ER8*GNM1+ER9*GNM2+ER10*GNM3+ER11*GNM4;
END I;
WRITE(UTT,UTSP);
WRITE(UTV,FOR I:=(1,1,N) DO V1(I));
FUTSP:=UTSP;
READ(UTSP,ENDPROC);
IF UTSP GTR B+&-7 THEN
BEGIN
 WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.');
 GO TO ENDPROC;
END;
IF FUTSP GTR UTSP THEN
BEGIN
 WRITE(<<'*** UTSKRIFTSPUNKTENE LIGGER IKKE I STIGENDE REKKEFØLGE.',
        A1,'*** DETTE MEDFØRER REDUSERT NØYAKTIGHET.',A1.1>>);
END;
GO TO UTSKRIFTSTEST;
NODATA: WRITE('*** BRUKER HAR IKKE SPESIFISERT UTSKRIFTSPUNKTER.');
ENDPROC: WRITE(<<'*** PROCEDURE PERDIAG ER TERMINERT.',A2.1>>);
END PROCEDURE PERDIAG;
```

6.9. Utskrift av SC4.

```
P.SC4
PROCEDURE SC4(F,A,B,H,YA,YDA,N,EPS,EOP);
 VALUE A,B,H,N,EPS,EOP;
 REAL A,B,H,EPS;
 INTEGER N,EOP;
 ARRAY YA,YDA;
 PROCEDURE F;
 BEGIN
  ARRAY UNP1,UNP1S,UN,UNM1,UNM2,UNM3,UNM4,UNM5,UNM6,UNM7,
        FIN,FINM1,FINM2,FINM3,FINM4,FINM5,FINM6,FINM7,
        V1,V2,V3,V4,V5,W(1:N);
  SWITCH UVALG:=UV1,UV2,UV3,UV4;
  SWITCH FIVALG:=FIV1,FIV2,FIV3,FIV4;
  INTEGER I,J,ASEHE,ANTMH;
  REAL C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8,
       R0,R1,R2,R3,R4,R5,R6,R7,R8,R9,R10,R11,
       H2,HH,
       I192,I240,I6,I30,I3G2,I9G2,
       I19,I240G299,I15G11,I120G97,I5G2,
       I240G19,I20G17,I60,
       I120G7,I12,
       FUTSP,UTSP,S,MH,MINEPS,MUW,TF,MAKSDIF,T;
  BOOLEAN INR1,INR2; COMMENT INTEGRASJON NR. 1 OG 2;
  BOOLEAN EPSFORANDRET;
  FORMAT UTT('UTSKRIFTSPUNKT:      *****',D18.8,X8,'*****',A2);
  FORMAT UTV('LØSNINGSVEKTOR:',A1,:N:(R17.9,X5),A2);
  PROCEDURE WEIGHT(EOP,U,N,W);
   COMMENT PROSEDYRE SOM OPPRETTER OG OPPDATERER FEILVEKTOREN W;
   VALUE EOP,U,N;
   INTEGER EOP,N;
   ARRAY U,W;
   BEGIN
    SWITCH E:=E1,E2,E3;
    INTEGER I;
    REAL S;
    GO TO E(EOP);
    E1: COMMENT ABSOLUTT;
        FOR I:=(1,1,N) DO W(I):=1.0;
        GO TO SLUTT;
    E2: COMMENT RELATIV;
        FOR I:=(1,1,N) DO
        BEGIN
         S:=ABS(U(I));
         W(I):=IF S LSS &-8 THEN &8 ELSE 1.0/S;
        END I;
        GO TO SLUTT;
    E3: COMMENT BLANDET;
        FOR I:=(1,1,N) DO
        BEGIN
         S:=ABS(U(I));
         W(I):=IF S GTR 1.0 THEN 1.0/S ELSE 1.0;
        END;
    SLUTT:
   END PROCEDURE WEIGHT;
  COMMENT
  **************************** STARTTEST ******************************
  IF EOP NEQ 1 AND EOP NEQ 2 AND EOP NEQ 3 THEN
  BEGIN
   WRITE('*** FEILOPSJON MÅ VÆRE 1, 2 ELLER 3.');
   GO TO ENDPROC;
  END;
  READ(UTSP,NODATA); COMMENT LESER FØRSTE UTSKRIFTSPUNKT;
```

```
IF UTSP GTR B+&-7 THEN
BEGIN
 WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.');
 GO TO ENDPROC;
END;
COMMENT
************************** INITIALISERING **************************
BRUKER EN NYSTRØMMETODE AV ORDEN 5 SOM STARTMETODE.
DETTE ER EN RUNGE-KUTTA-METODE FOR INTEGRASJEN AV 2. ORDENS PROBLEMER
*        *        *        *        *        *        *
FØRST BEREGNES ENDEL VERDER SOM SKAL BRUKES OFTE I RUTINEN;
I192:=1.0/192.0;
I240:=1.0/240.0;
I6:=1.0/6.0;
I12:=1.0/12.0;
I30:=1.0/30.0;
I3G2:=2.0/3.0;
I9G2:=2.0/9.0;
I19:=1.0/19.0;
I240G299:=299.0/240.0;
I15G11:=11.0/15.0;
I120G97:=97.0/120.0;
I5G2:=0.4;
I240G19:=19.0/240.0;
I20G17:=17.0/20.0;
I60:=1.0/60.0;
I120G7:=7.0/120.0;
WRITE(UTT,A);
WRITE(UTV,YA);
FOR I:=(1,1,N) DO UNM4(I):=YA(I);
INR1:=TRUE;
COMMENT  FØRST BEREGNING AV PASSE H;
STARTINTEGRASJON:
H2:=H*H;
C1:=0.4*H;
C2:=0.08*H2;
C3:=I3G2*H;
C4:=I9G2*H2;
C5:=0.8*H;
C6:=0.16*H2;
C7:=I192*H2;
C8:=I192*H;
T:=A;
J:=0;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 UN(I):=YA(I);
 UNM7(I):=YDA(I);
END I;
OPP:
J:=J+1;
F(T,UN,N,V1);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R1:=UN(I);
 R2:=UNM7(I);
 R3:=V1(I);
 V2(I):=R1+C1*R2+C2*R3;
 V3(I):=R1+C3*R2+C4*R3;
 V4(I):=R1+C5*R2+C6*R3;
END I;
F(T+C1,V2,N,V5);
```

```
F(T+C3,V3,N,V2);
FOR I:=(1,1,N) DO
V4(I):=V4(I)+C6*V5(I);
F(T+C5,V4,N,V3);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=UN(I);
 R1:=23.0*V1(I);
 R2:=V5(I);
 R3:=V2(I);
 R4:=V3(I);
 R5:=UNM7(I);
 R6:=UN(I):=R0+H*R5+C7*(R1+75.0*R2-27.0*R3+25.0*R4);
 UNM7(I):=UNM7(I)+C8*(R1+125.0*R2-81.0*R3+125.0*R4);
 IF INR1 THEN GO TO UV3;
 GO TO UVALG(J);
 UV1: UNM3(I):=R6; GO TO UV4;
 UV2: UNM2(I):=R6; GO TO UV4;
 UV3: UNM1(I):=R6; GO TO UV4;
 UV4:
END I;
IF INR1 THEN
BEGIN
 H:=0.5*H;
 INR1:=FALSE;
 INR2:=TRUE;
 GO TO STARTINTEGRASJON;
END;
IF INR2 AND J EQL 2 THEN
BEGIN
 MAKSDIF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNM1(I)-UNM2(I)));
 IF MAKSDIF LSS &-10 THEN
 H:=SQRT(H*EPS)
 ELSE
 BEGIN
  R0:=0.5*(EPS/MAKSDIF)**I6;
  IF R0 GTR 4.0 THEN R0:=4.0;
  H:=H*R0;
 END;
 R0:=UTSP-A;
 IF R0 GTR &-6 AND R0 LSS 2.0*H THEN H:=0.5*R0;
 INR2:=FALSE;
 GO TO STARTINTEGRASJON;
END;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 GO TO FIVALG(J);
 FIV1: FINM4(I):=V1(I);
 FIV2: FINM3(I):=V1(I);
 FIV3: FINM2(I):=V1(I);
 FIV4: FINM1(I):=V1(I);
END I;
T:=T+H;
IF J LSS 4 THEN GO TO OPP;
F(T,UN,N,FIN);
HH:=0.5*H;
HOVEDINTEGRASJON:
COMMENT
**************************** PREDIKTERING ****************************
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 V1(I):=2.0*UN(I)-UNM1(I);
```

```
 UNP1S(I):=V1(I)+H2*(I240G299*FIN(I)-I15G11*FINM1(I)+I120G97*FINM2(I)
          -I5G2*FINM3(I)+I240G19*FINM4(I));
END I;
COMMENT
*************************** KORRIGERING ****************************
COMMENT LAGRER FI,N+1 I V2;
F(T+H,UNP1S,N,V2);
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 UNP1(I):=V1(I)+H2*(I240G19*V2(I)+I20G17*FIN(I)+I120G7*FINM1(I)
        +I60*FINM2(I)-I240*FINM3(I));
END I;
COMMENT *** HAR NA FUNNET KORREKTOREN. ESTIMERER SA GLOBAL FEIL. ***
        *** GLOBAL FEIL=LOKAL FEIL/H.                            ***;
WEIGHT(EOP,UN,N,W);
TF:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I)-UNP1S(I))*W(I))*I19;
MUW:=MAX(FOR I:=(1,1,N) DO ABS(UNP1(I))*W(I));
MINEPS:=1.49&-8*MUW; COMMENT MINSTE EPS EN KAN KREVE;
IF EPS LSS MINEPS THEN
BEGIN
 IF EPSFORANDRET THEN
 BEGIN
  WRITE(<<'*** RUTINEN KREVER NY EPSFORANDRING.',A1,
         '*** DETTE TYDER PA STADIG ØKENDE LØSNING,',A1,
         '*** MENS BRUKER ØNSKER ABSOLUTT FEILTESTING.',A1,
         '*** BRUK BLANDET FEIL: EOP=3.',A1.1>>);
  GO TO ENDPROC;
 END;
 EPSFORANDRET:=TRUE;
 EPS:=MINEPS;
 WRITE(<<'*** EPS ER KREVD FOR LITEN FOR DETTE PROBLEMET',A1,
        '*** I FORHOLD TIL DEN GITTE MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
        '*** EPS ER AV RUTINEN FORANDRET TIL ',R10.3,'.',A1.1>>,
     MINEPS);
END;
IF TF/H GTR EPS THEN
BEGIN
 COMMENT
 *** SKRITTET ER FOR STORT OG MA HALVERES. ***;
 MH:=1.49&-8*ABS(T);
 COMMENT
 *** MH ER MINSTE TILLATTE H PGA. MASKINNØYAKTIGHETEN. ***;
 IF 0.5*H LSS MH THEN
 BEGIN
  WRITE(<<'*** SKRITTET ER AV RUTINEN KREVD HALVERT.',A1,
         '*** DETTE ER IMIDLERTID UTILRADELIG PGA DEN GITTE ',
         'MASKINNØYAKTIGHET.',A1,
         '*** PRØVER DERFOR MED LITT FOR STORT SKRITT',A1,
         '*** I HAP OM AT VANSKELIGHETEN ER LOKAL.',A1.1>>);
  ANTMH:=ANTMH+1;
  IF ANTMH GTR 3 THEN
  BEGIN
   WRITE(<<'*** HAR NA BRUKT FOR STORT SKRITT 3 GANGER. ',A1,
          '*** DET ER UHOLDBART A FORTSETTE.',A1.1>>);
   GO TO ENDPROC;
  END;
  GO TO NOCHANGE;
 END
 ELSE ANTMH:=0;
 COMMENT
 *** INTERPOLASJON FOR A FINNE U,N-1/2 OG U,N-3/2. ***;
 R2:=0.140625*H2;
```

```
R3:=0.328125*H2;
FOR I:=(1,1,N) DO
BEGIN
 R0:=0.078125*(UNM3(I)+UN(I))+0.421875*(UNM2(I)+UNM1(I))
     -R2*(FINM2(I)+FINM1(I));
 R1:=-0.078125*UNM3(I)-0.359375*UNM2(I)+1.453125*UNM1(I)
     -0.015625*UN(I)+R2*FINM2(I)+R3*FINM1(I);
 UNM4(I):=UNM2(I);
 UNM3(I):=R0;
 UNM2(I):=UNM1(I);
 UNM1(I):=R1;
 FINM4(I):=FINM2(I);
 FINM2(I):=FINM1(I);
END I;
F(T-HH,UNM1,N,FINM1);
F(T-1.5*H,UNM3,N,FINM3);
ASEHE:=0;
H:=HH;
H2:=H*H;
HH:=0.5*H;
COMMENT
*** HAR NÅ GJORT KLAR TIL Å INTEGRERE PÅ NYTT MED HALVERT SKRITT. **
GO TO HOVEDINTEGRASJON;
END FOR STOR H
ELSE
IF TF/H LSS 0.005*EPS AND ASEHE GEQ 3 THEN
BEGIN
 COMMENT
 *** SKRITTET VAR FOR LITE OG BØR DOBLES. SKRITTET AKSEPTERES. ***;
 HH:=H;
 H:=2.0*H;
 H2:=H*H;
 F(T+HH,UNP1,N,FIN);
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  UN(I):=UNP1(I);
  UNM2(I):=UNM3(I);
  UNM3(I):=UNM5(I);
  UNM4(I):=UNM7(I);
  FINM2(I):=FINM3(I);
  FINM3(I):=FINM5(I);
  FINM4(I):=FINM7(I);
 END I;
 ASEHE:=0;
 T:=T+HH;
 GO TO UTSKRIFTSTEST;
 END FOR LITEN H;
 NOCHANGE:
 COMMENT
 *** H ER PASSE STOR ELLER ENDRING ER UMULIG. SKRITTET AKSEPTERES. ***
 LAGRER FI,N+1 I UNM7.;
 ASEHE:=ASEHE+1;
 FOR I:=(1,1,N) DO
 BEGIN
  UNM7(I):=UNM6(I);
  UNM6(I):=UNM5(I);
  UNM5(I):=UNM4(I);
  UNM4(I):=UNM3(I);
  UNM3(I):=UNM2(I);
  UNM2(I):=UNM1(I);
  UNM1(I):=UN(I);
  UN(I):=UNP1(I);
```

```
      FINM7(I):=FINM6(I);
      FINM6(I):=FINM5(I);
      FINM5(I):=FINM4(I);
      FINM4(I):=FINM3(I);
      FINM3(I):=FINM2(I);
      FINM2(I):=FINM1(I);
      FINM1(I):=FIN(I);
    END I;
    T:=T+H;
    F(T,UNP1,N,FIN);
    COMMENT
    *** HAR NA TATT ET PASSE SKRITT OG ER KLAR TIL A TA ET NYTT SKRITT.**
    UTSKRIFTSTEST:
    IF UTSP GTR T THEN GO TO HOVEDINTEGRASJON;
    S:=3.0+(UTSP-T)/H;
    R0:=S+1.0;
    R1:=S-1.0;
    R2:=S-2.0;
    R3:=S-3.0;
    R4:=S-4.0;
    R5:=3.0*S*S;
    R6:=-I30*(R5-12.0*S+5.0)*R1*R2*R3;
    R7:=0.1*(R5-10.0*S+12.0)*S*R2*R3;
    R8:=-0.1*(R5-8.0*S+9.0)*S*R1*R3;
    R9:=I30*(R5-6.0*S-4.0)*S*R1*R2;
    R10:=0.1*H2*S*R1*R2*R3*R4;
    R11:=-0.1*H2*R0*S*R1*R2*R3;
    WRITE(UTT,UTSP);
    WRITE(UTV,FOR I:=(1,1,N) DO
         R6*UNM3(I)+R7*UNM2(I)+R8*UNM1(I)+R9*UN(I)+R10*FINM2(I)
         +R11*FINM1(I));
    FUTSP:=UTSP;
    READ(UTSP,ENDPROC);
    IF UTSP GTR B+&-7 THEN
    BEGIN
     WRITE('*** UTSKRIFTSPUNKT LIGGER UTENFOR INTERVALLET.');
     GO TO ENDPROC;
    END;
    IF FUTSP GTR UTSP THEN
    BEGIN
     WRITE(<<'*** UTSKRIFTSPUNKTENE LIGGER IKKE I STIGENDE REKKEFØLGE.',
            A1,'*** DETTE MEDFØRER REDUSERT NØYAKTIGHET.',A1.1>>);
    END;
    GO TO UTSKRIFTSTEST;
    NODATA: WRITE('*** BRUKER HAR IKKE SPESIFISERT UTSKRIFTSPUNKTER.');
    ENDPROC: WRITE(<<'*** PROCEDURE SC4 ER TERMINERT.',A2.1>>);
  END PROCEDURE SC4;
```

7. TEST AV RUTINENE.

Som beskrevet i foregående kapitler er det laget tre rutiner bygd på de metoder som er beskrevet tidligere.

PERDIAG bygger uten tilnærmelser på prediktor-korrektor-metoden $TTSC_4$ basert på de trigonometrisk tilpassete Størmer- og Cowellmetoder med k=4(Orden 5). Rutinen muliggjør trigonometrisk tilpasning med en diagonalmatrise. I testene brukes Jacobimatrisen hvis denne er diagonal, ellers en diagonal tilnærmelse til denne.

PER bygger også på $TTSC_4$, men anvender polynomisk approksimasjon til cosQ, hvor Q er en generell reell matrise. Rutinen kan tilpasse med en vilkårlig reell matrise. I testene anvendes systemets Jacobimatrise.

SC4 er bygd over en prediktor-korrektormetode basert på Størmers og Cowells metode med k=4(Orden 5). Den anvender altså ingen trigonometrisk tilpasning.

Alle rutinene bruker samme administrative instruksjoner og har samme startmetode. De er kodet uten sikre dummyoperasjoner (addisjoner og multiplikasjoner med null og liknende). Som startmetode gjøres bruk av en Nyströmmetode av orden 5 for løsning av baneproblemer($\vec{y}''=\vec{f}(x,\vec{y})$). PER og SC4 bruker polynomisk interpolasjon ved halvering av skritt og utskrift i vilkårlige punkter. De tre rutinene er listet i kapittel 6.

Rutinene er testet ved hjelp av 8 testproblemer (betegnet T1-T8). Avhengig av problemets art er det bedt om absolutt, relativ eller blandet feilestimering i rutinene. Med blandet feil menes her absolutt feil for komponenter som er mindre enn eller lik 1 i absoluttverdi, ellers relativ feil.

7.1. Testproblemer.

T1:

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Løsning: $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin 2x \end{pmatrix}$

Absolutt feilestimering.

T2:

$$y'' = -y + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Løsning: $y = \sin x + \frac{1}{1+x}$

Absolutt feilestimering.

T3:

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} 20x^3+x^5 \\ 12x^2+4x^4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Løsning: $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x + x^5 \\ \sin 2x + x^4 \end{pmatrix}$

Blandet feilestimering.

T4:

$$y'' = 100(\cos 2x - 1)y$$

$$y(0) = 1 \;,\; y'(0) = 0$$

"Løsningen" er beregnet ved hjelp av en rutine som løser stive 1. ordens system. Feilen ligger rundt 10^{-7}.

Blandet feilestimering.

T5:

$$\vec{y}'' = -\frac{1}{|\vec{y}|^3}\vec{y} \qquad \text{(Newtons gravitasjonslov med skalerte enheter)}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løsning: $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$

Absolutt feilestimering.

T6:

$$\vec{y}'' = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -131 & 30 \\ 180 & -56 \end{pmatrix}\vec{y}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \;,\; \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Løsning: $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos x + 2\cos 4x + \sin x + 2\sin 4x \\ 4\cos x - 3\cos 4x + 4\sin x - 3\sin 4x \end{pmatrix}$

Absolutt feilestimering.

T7:

$$\vec{y}'' = \begin{pmatrix} x^5 \\ x^4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Løsning: } \vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{42}x^7 + 1 \\ \frac{1}{30}x^6 - x + 4 \end{pmatrix}$$

Relativ feilestimering.

T8:

$$y'' = \frac{y}{x^2}((\ln y + x)^2 + x)$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 1$$

$$\text{Løsning: } y = x^x$$

Relativ feilestimering.

Alle rutinene er anvendt på T1-T5. PERDIAG er ikke prøvd på T6-T8. I PER brukes tilpasningen

$A^2 = -\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{y}}$ i alle tilfelle. Dette gjelder også PERDIAG bortsett fra for T5 hvor Jacobimatrisen ikke er diagonal. Her brukes $A^2 = -\frac{1}{|\vec{y}|^3} I$.

Vi har spesifisert estimert global feil "eps" lik 10^{-2}, 10^{-4} og 10^{-6} for alle problemer.

7.2. Presentasjon av testresultatene.

For hvert testproblem er det valgt 5 x-verdier hvor løsningen er beregnet ved hjelp av de tre rutinene. Global feil er beregnet (svarende til type feilestimering for problemet: absolutt,relativ eller blandet). For hver integrasjon er anvendt eksekveringstid (som oppgis av datamaskinsystemet) nedskrevet. Disse resultater presenteres i tabellene 7.1-8 som angitt i figur 7.1.

	PER		PERDIAG	SC4
Ønsket global feil eps	Eksekveringstid i millisekunder			
Utskrifts-punkter x_1 x_2 x_3 x_4 x_5	Global feil i 1. komp.	Global feil i 2. komp.		

Figur 7.1. Struktur for tabellene 7.1-8.

Størst feil på integrasjonsintervallet er understreket. Der hvor systemet ikke er koplet (diagonal Jacobimatrise) er feilene i hver komponent behandlet atskilt. Disse understrekete feil er plottet inn i feil-tid-(e-t-) diagrammer på dobbeltlogaritmisk papir, en figur pr. ukoplet komponent. På grunnlag av de tre punktene for hver rutine er det trukket en omtrentlig lineær regresjonskurve. Diagrammene foreligger i figurene 7.2-12.
I de tilfelle hvor beregnet global feil e ikke er positivt korrelert til ønsket global feil eps, er punktene nummerert med 1, 2 og 3 for henholdsvis eps=10^{-2}, 10^{-4} og 10^{-6}.

Disse kurvene danner grunnlaget for vurdering av rutinene. Plassforbruket er altså ikke tatt med i undersøkelsen. For de små systemene det er testet på vil ikke dette være av særlig betydning.

I T1 for eksempel krever rutinene PER, PERDIAG og SC4(inklusive funksjons- og Jacobirutine) henholdvis 8948/5199, 8683/5524 og 6747/5153 hvor første tall angir plassforbruk for instruksjoner og siste tall for variable, alt regnet i datamaskinord. Dette aspekt arter seg altså nokså likt for disse små systemene. For større systemer vil PER etterhvert atskille seg fra de to andre i ugunstig retning, mens PERDIAG og SC4 stort sett vil følge hverandre.

Avrundingsfeilen i den datamaskinen som er brukt (UNIVAC 1108) er $1.5 \cdot 10^{-8}$. I PERDIAG er det brukt dobbelt nøyaktighet ved beregning av koeffisientene. Avrundingfeilen i dette tilfelle er $1.7 \cdot 10^{-18}$.

Problem: T1

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	964		158		412	
1.0	8.22,-8	1.08,-5	1.63,-7	1.08,-5	5.92,-8	8.52,-6
π	1.35,-5	7.80,-5	9.00,-8	6.86,-6	5.27,-5	2.69,-3
2π	1.33,-5	1.49,-4	6.00,-8	6.89,-6	1.27,-4	8.25,-3
10π	2.73,-4	1.82,-2	1.16,-6	5.93,-6	2.04,-4	2.93,-2
20π	2.61,-4	5.23,-2	2.09,-7	2.95,-6	5.49,-4	8.23,-2
10^{-4}	1139		171		949	
1.0	1.87,-7	8.07,-6	2.01,-7	3.82,-7	1.79,-7	7.06,-6
π	1.90,-5	1.03,-3	2.10,-7	3.58,-7	4.43,-6	2.22,-5
2π	1.30,-6	2.74,-5	2.20,-7	6.26,-7	8.21,-6	1.32,-4
10π	1.65,-4	6.10,-2	2.20,-7	2.00,-6	3.31,-5	4.10,-4
20π	9.81,-5	2.68,-1	2.80,-6	4.26,-6	6.60,-5	9.72,-4
10^{-6}	2748		187		1906	
1.0	5.28,-8	1.42,-5	8.86,-7	5.27,-7	6.71,-7	5.46,-7
π	7.00,-8	1.22,-6	5.70,-7	5.36,-7	7.00,-8	2.25,-6
2π	1.90,-7	1.72,-6	5.80,-7	5.70,-7	3.00,-7	3.55,-6
10π	1.25,-5	4.78,-4	4.20,-7	1.22,-6	1.83,-6	3.67,-5
20π	2.61,-6	9.16,-4	4.60,-7	2.63,-6	4.26,-6	3.07,-4

Tabell 7.1.

Problem: T2

	PER	PERDIAG	SC4
10^{-2}	380	131	197
1.0	2.80,-6	1.54,-6	3.22,-6
π	1.12,-4	2.08,-4	1.66,-4
2π	3.13,-3	7.18,-4	2.19,-3
10π	6.76,-3	4.48,-4	4.65,-3
20π	1.26,-2	1.55,-3	2.77,-3
10^{-4}	486	162	338
1.0	7.66,-6	4.74,-6	7.54,-6
π	4.76,-5	4.00,-5	4.92,-5
2π	1.50,-6	2.36,-5	5.84,-5
10π	1.13,-3	7.09,-5	6.48,-5
20π	1.00,-2	1.53,-4	2.54,-4
10^{-6}	989	293	697
1.0	2.66,-6	4.32,-6	8.65,-7
π	4.34,-6	8.66,-6	2.68,-6
2π	3.09,-6	8.55,-6	3.28,-6
10π	2.19,-5	1.15,-5	4.58,-5
20π	4.78,-5	1.35,-5	1.08,-4

Tabell 7.2.

Problem: T3

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	430		232		139	
0.01	2.85,-7	1.51,-8	3.54,-8	2.26,-9	2.85,-7	1.79,-8
0.1	1.60,-7	1.27,-8	1.05,-6	8.77,-8	1.97,-7	2.83,-8
1.0	3.50,-6	5.15,-7	7.19,-6	9.94,-7	2.95,-6	8.75,-8
2.0	1.83,-5	2.15,-6	1.71,-5	4.66,-8	2.45,-7	2.42,-5
4.0	3.10,-6	2.64,-7	5.71,-5	6.30,-8	4.34,-7	6.41,-5
10^{-4}	340		245		141	
0.01	2.85,-7	1.51,-8	3.54,-8	2.26,-9	2.85,-7	1.79,-8
0.1	1.60,-7	1.27,-8	1.05,-6	8.77,-8	1.97,-7	2.83,-8
1.0	3.50,-6	5.15,-7	7.19,-6	9.94,-7	2.95,-6	8.75,-8
2.0	1.09,-6	2.05,-6	4.14,-7	8.59,-8	7.73,-8	7.47,-7
4.0	2.55,-6	2.91,-7	2.46,-6	1.10,-7	7.43,-8	3.54,-6
10^{-6}	524		397		179	
0.01	2.85,-7	1.51,-8	3.54,-8	2.26,-9	2.85,-7	1.79,-8
0.1	1.75,-7	1.27,-8	1.81,-6	2.35,-7	2.83,-8	2.83,-8
1.0	4.71,-7	6.65,-8	2.36,-5	2.70,-6	2.95,-6	3.11,-7
2.0	1.57,-7	5.18,-8	1.66,-6	1.19,-7	1.09,-7	5.31,-8
4.0	1.37,-8	1.53,-7	2.40,-7	2.58,-7	4.50,-8	1.37,-7

Tabell 7.3.

Problem: T4

	PER	PERDIAG	SC4
10^{-2}	243	161	99
0.1	5.84,-3	4.06,-7	5.71,-3
0.2	5.90,-6	1.75,-6	5.90,-6
0.5	1.35,-4	1.49,-4	2.66,-4
1.0	6.71,-3	5.50,-3	3.16,-3
2.0	3.75,-3	2.71,-3	3.38,-3
10^{-4}	447	289	175
0.1	2.54,-5	4.06,-7	2.54,-5
0.2	4.66,-6	1.75,-6	4.65,-6
0.5	4.67,-6	2.61,-6	1.72,-5
1.0	3.38,-5	6.35,-5	3.98,-5
2.0	3.56,-5	1.10,-5	5.17,-4
10^{-6}	1009	434	406
0.1	4.14,-7	3.99,-7	4.14,-7
0.2	1.75,-6	1.64,-6	1.76,-6
0.5	8.91,-8	1.66,-6	1.21,-8
1.0	1.34,-5	1.07,-5	9.39,-6
2.0	3.01,-5	2.71,-5	2.19,-5

Tabell 7.4.

Problem: T5

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	2068		326		561	
1.0	7.52,-7	9.48,-8	8.27,-7	1.10,-7	6.92,-7	1.10,-7
π	2.65,-5	1.29,-5	1.60,-7	2.74,-6	6.38,-5	5.17,-5
2π	2.76,-2	5.94,-3	5.70,-7	2.84,-6	4.91,-3	7.90,-3
25π	3.17,-1	9.51,-1	5.64,+1	4.75,+2	2.02,-2	1.47,-1
50π	1.65,-1	9.40,-1	1.25,+2	1.07,+3	7.80,-2	1.54,-1
10^{-4}	7004		2646		1606	
1.0	2.22,-8	2.08,-8	2.68,-7	7.28,-8	1.49,-7	1.58,-7
π	2.74,-6	6.90,-6	9.70,-8	1.71,-6	1.11,-5	3.33,-6
2π	3.02,-6	1.41,-5	7.90,-7	1.25,-6	4.54,-5	1.58,-4
25π	3.94,-5	2.29,-3	1.87,0	3.71,-1	1.12,-3	3.32,-2
50π	4.59,-5	9.89,-3	9.59,-2	2.75,-1	1.02,-2	1.34,-1
10^{-6}	7031		1200		7555	
1.0	2.08,-7	3.58,-8	1.03,-6	4.98,-7	4.55,-7	2.97,-7
π	1.27,-6	5.10,-6	1.07,-6	7.07,-6	2.15,-6	6.55,-6
2π	3.07,-6	5.20,-6	1.77,-6	6.33,-7	2.40,-7	1.23,-5
25π	2.54,-5	1.45,-3	7.78,-6	1.54,-5	9.50,-7	5.95,-6
50π	3.98,-5	5.84,-3	3.96,-4	1.46,-2	3.65,-4	1.27,-2

Tabell 7.5.

Problem: T6

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	368				179	
0.5	5.37,-5	8.11,-5			2.07,-2	3.11,-2
1.0	8.38,-4	1.26,-3			2.20,-3	3.29,-3
2.0	5.60,-4	8.39,-4			3.62,-3	5.43,-3
4.0	7.61,-4	1.14,-3			1.22,-2	1.83,-2
2π	8.44,-4	1.27,-3			1.17,-2	1.76,-2
10^{-4}	463				364	
0.5	1.14,-5	1.75,-5			1.79,-5	2.71,-5
1.0	5.15,-6	8.87,-5			2.06,-5	2.83,-5
2.0	3.44,-4	5.10,-4			2.54,-5	2.15,-5
4.0	2.50,-4	3.74,-4			1.79,-4	2.80,-4
2π	4.81,-5	7.80,-5			1.71,-4	2.16,-4
10^{-6}	955				659	
0.5	2.92,-6	3.58,-6			1.02,-6	8.00,-8
1.0	5.26,-6	1.39,-5			2.86,-6	2.23,-5
2.0	7.48,-6	9.20,-6			5.91,-7	9.86,-5
4.0	8.92,-6	4.29,-6			5.38,-5	4.14,-5
2π	1.61,-6	3.03,-5			3.49,-5	2.32,-4

Tabell 7.6.

Problem: T7

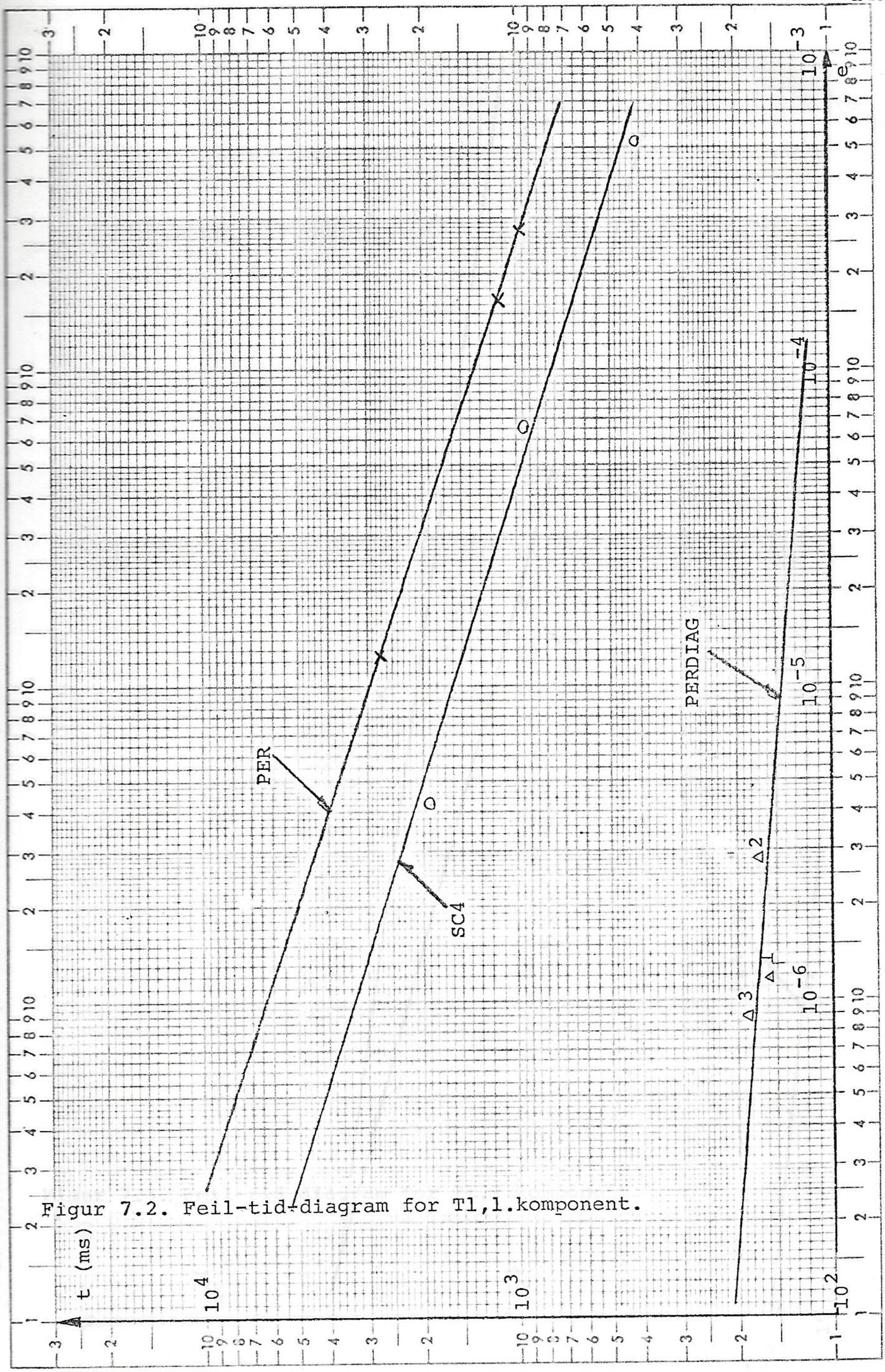
	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	331				114	
1.0	2.21,-5	1.60,-6			2.00,-5	5.52,-7
2.0	6.30,-4	8.14,-5			6.28,-4	7.97,-5
3.0	1.00,-4	1.11,-5			1.00,-4	1.07,-5
4.0	2.99,-5	1.32,-5			2.99,-5	1.31,-5
5.0	1.39,-4	3.47,-6			1.39,-4	3.43,-6
10^{-4}	635				154	
1.0	1.92,-6	5.78,-6			9.90,-7	6.64,-6
2.0	2.12,-5	8.64,-6			2.18,-5	1.04,-5
3.0	3.45,-6	7.04,-7			3.34,-6	1.21,-6
4.0	1.64,-6	6.08,-8			1.69,-6	1.08,-7
5.0	3.15,-6	1.23,-7			3.14,-6	1.80,-7
10^{-6}	818				233	
1.0	1.58,-6	8.90,-5			7.17,-7	9.00,-5
2.0	6.79,-7	1.30,-4			8.70,-8	1.32,-4
3.0	1.38,-7	3.16,-5			2.47,-7	3.25,-5
4.0	2.15,-7	7.82,-6			2.81,-7	8.17,-6
5.0	9.78,-8	2.66,-6			1.57,-7	2.78,-6

Tabell 7.7.

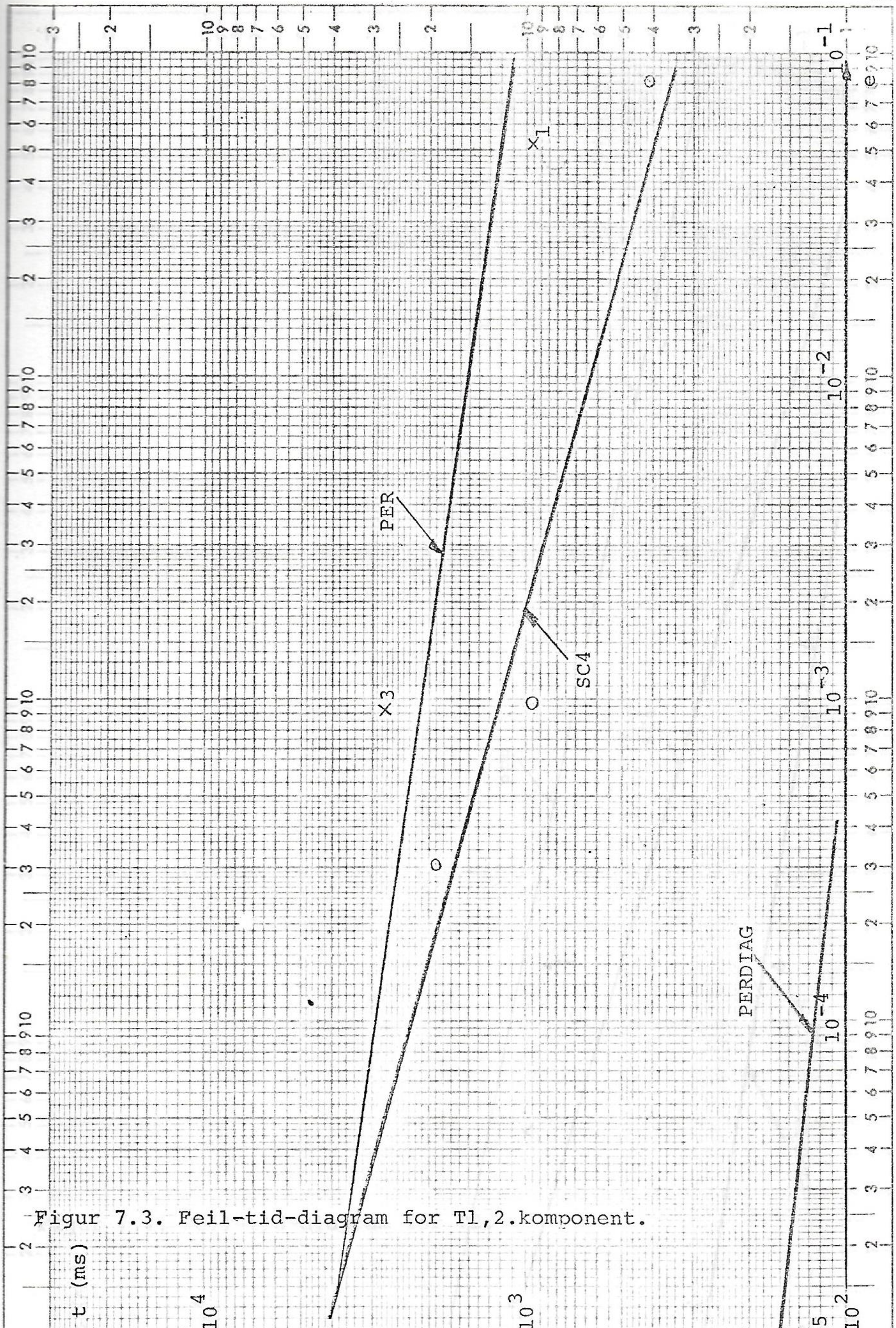
Problem: T8

	PER		PERDIAG		SC4	
10^{-2}	117				59	
1.1	4.59,-3				4.65,-3	
1.5	9.78,-6				1.04,-5	
2.0	1.67,-6				1.97,-6	
3.0	7.98,-6				3.40,-4	
4.0	3.59,-4				7.44,-4	
10^{-4}	132				86	
1.1	2.04,-5				2.05,-5	
1.5	9.09,-8				9.09,-8	
2.0	7.05,-6				7.45,-7	
3.0	2.55,-7				5.12,-6	
4.0	3.52,-6				1.39,-5	
10^{-6}	251				123	
1.1	1.89,-8				1.89,-8	
1.5	1.07,-7				5.06,-8	
2.0	2.23,-7				6.85,-7	
3.0	1.41,-7				4.41,-6	
4.0	8.95,-7				6.91,-6	

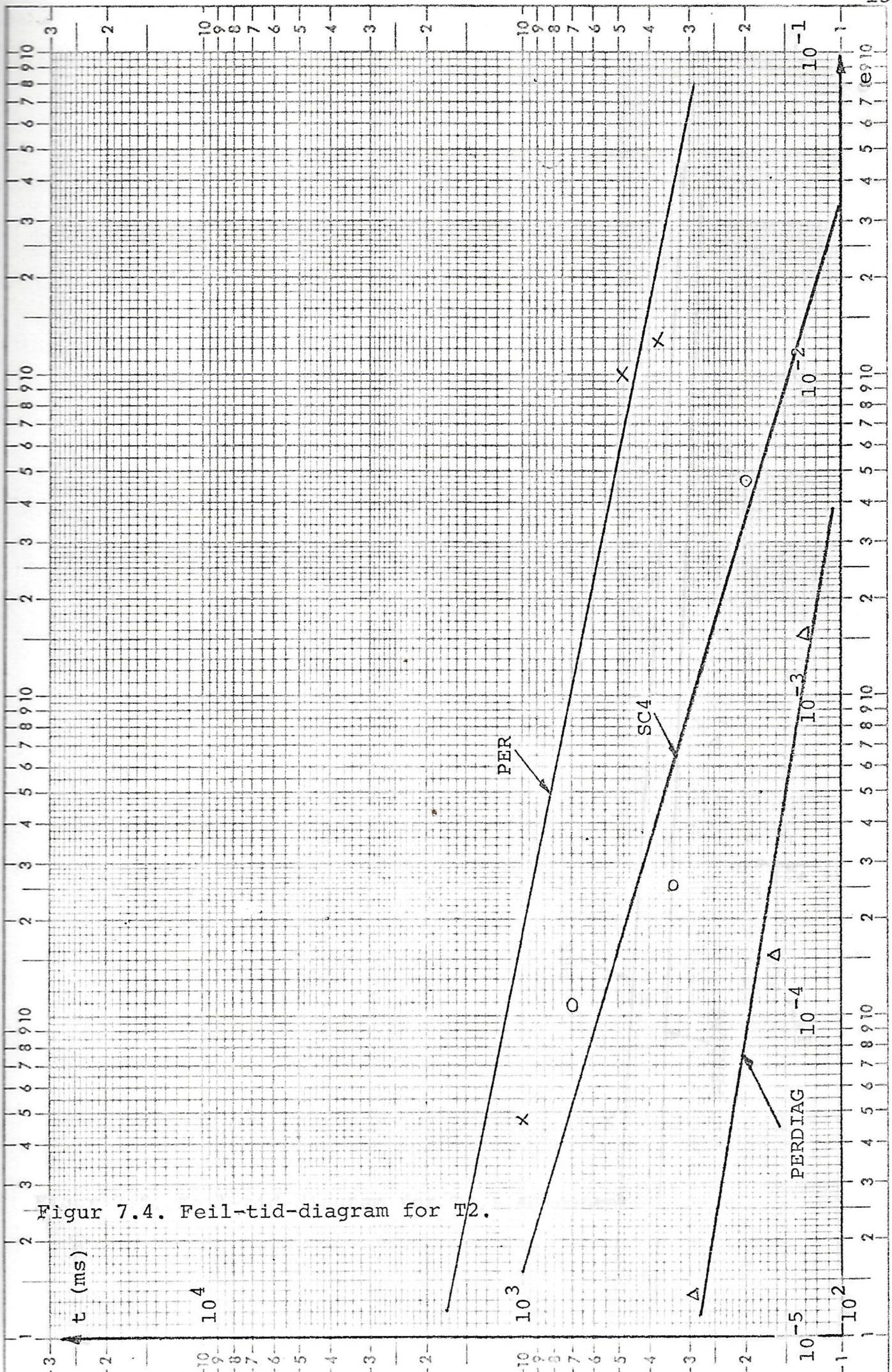
Tabell 7.8.



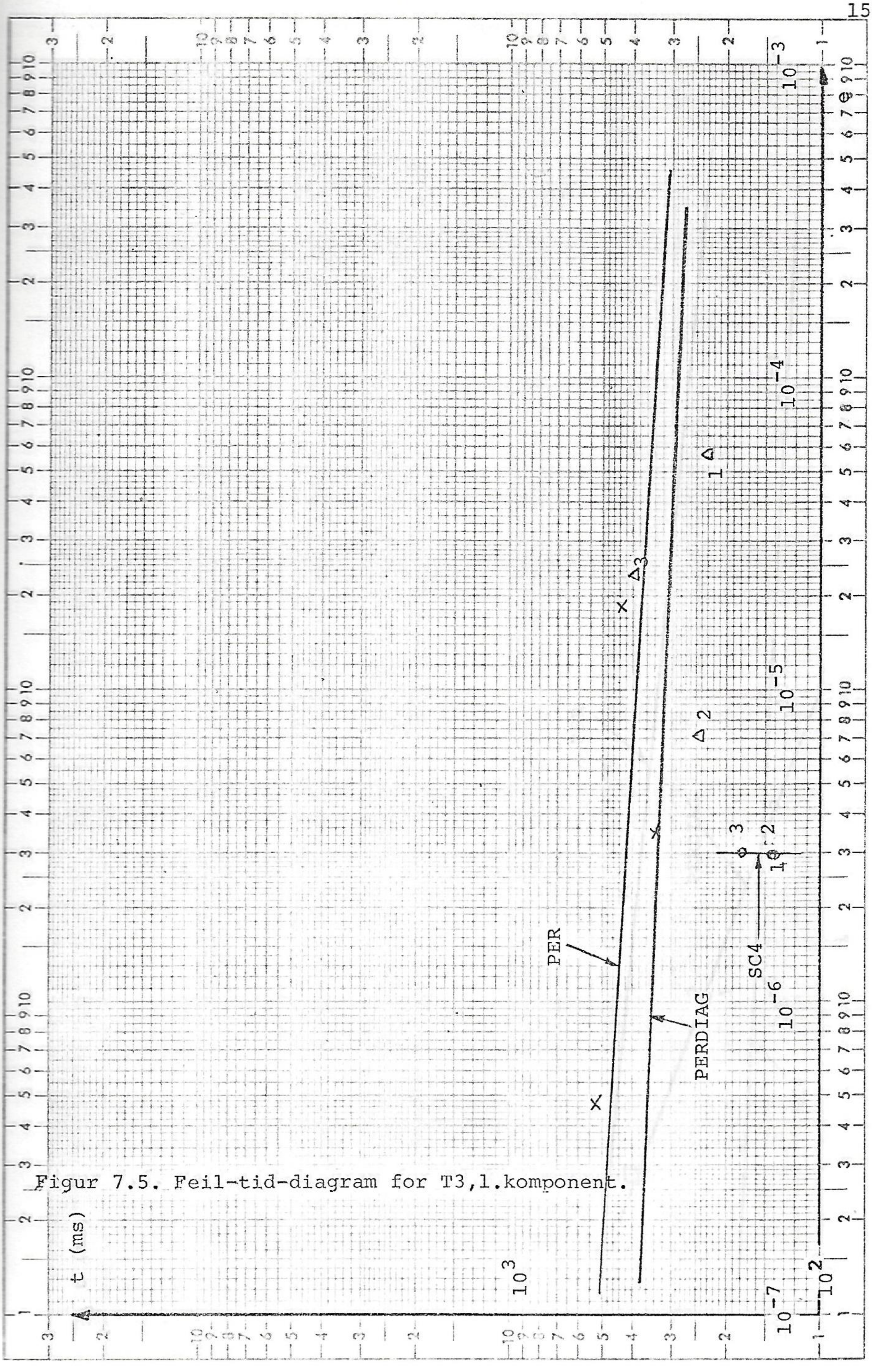
Figur 7.2. Feil-tid-diagram for T1,1.komponent.



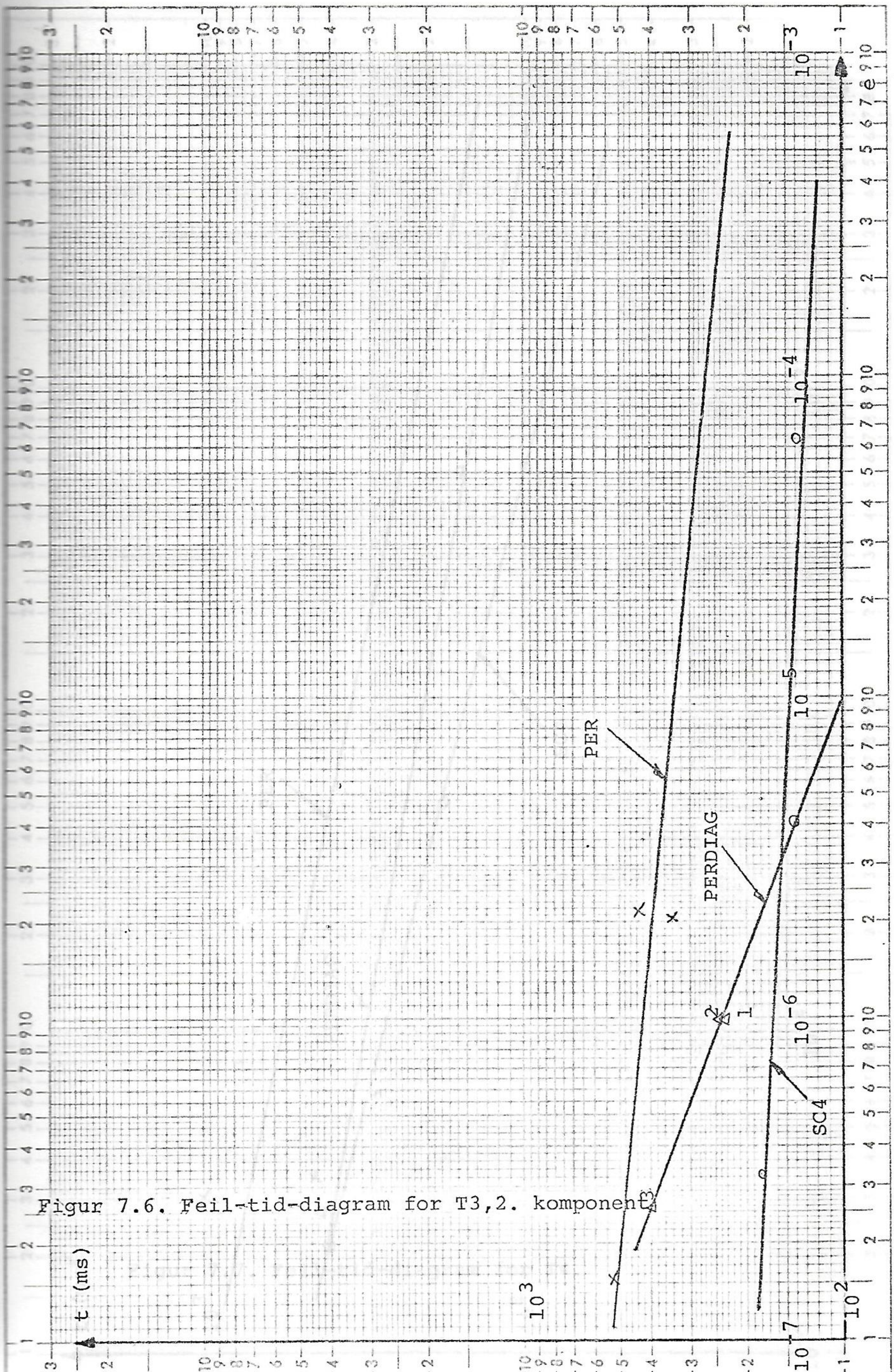
Figur 7.3. Feil-tid-diagram for Tl,2.komponent.



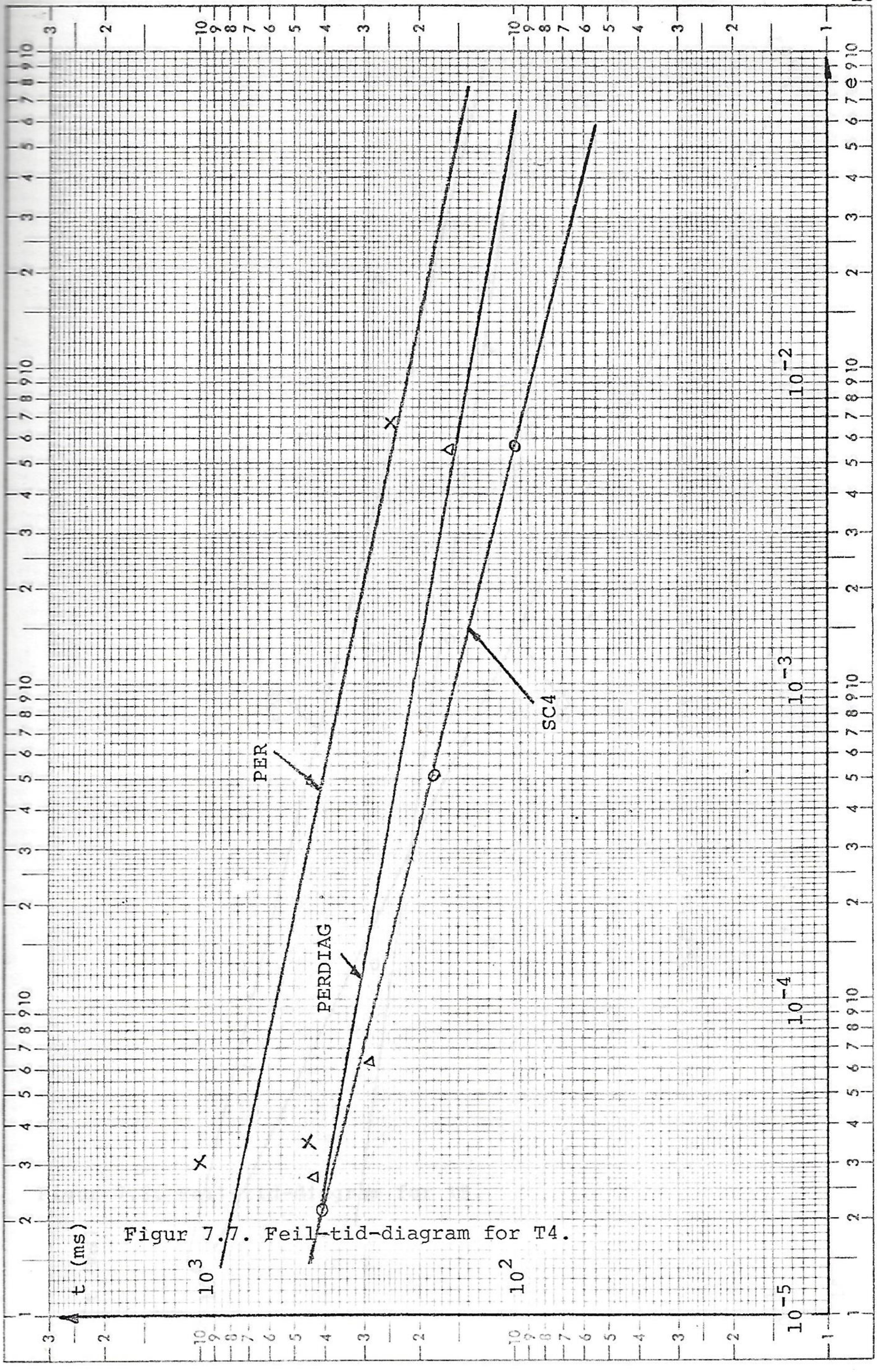
Figur 7.4. Feil-tid-diagram for T2.



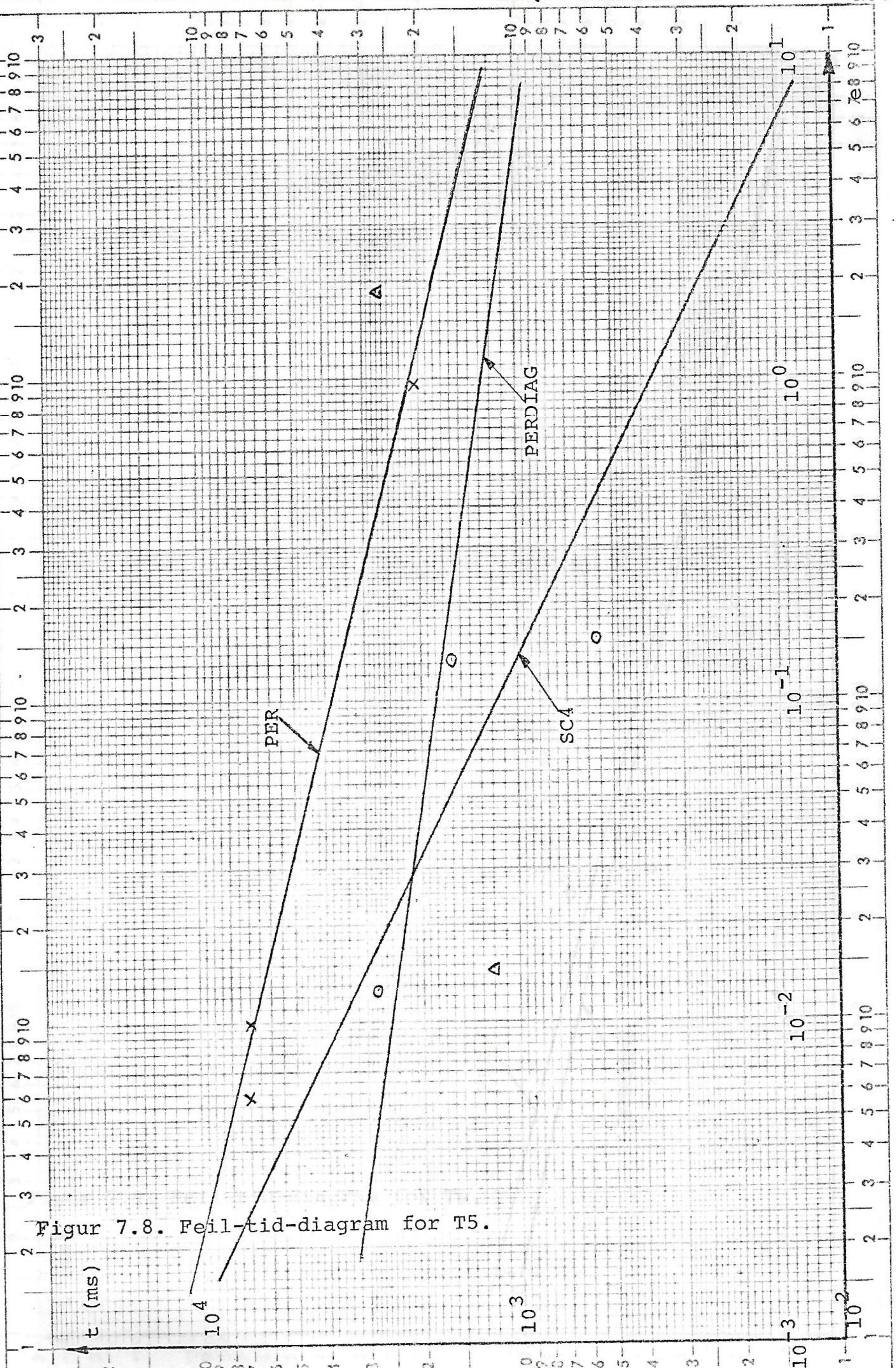
Figur 7.5. Feil-tid-diagram for T3,1.komponent.



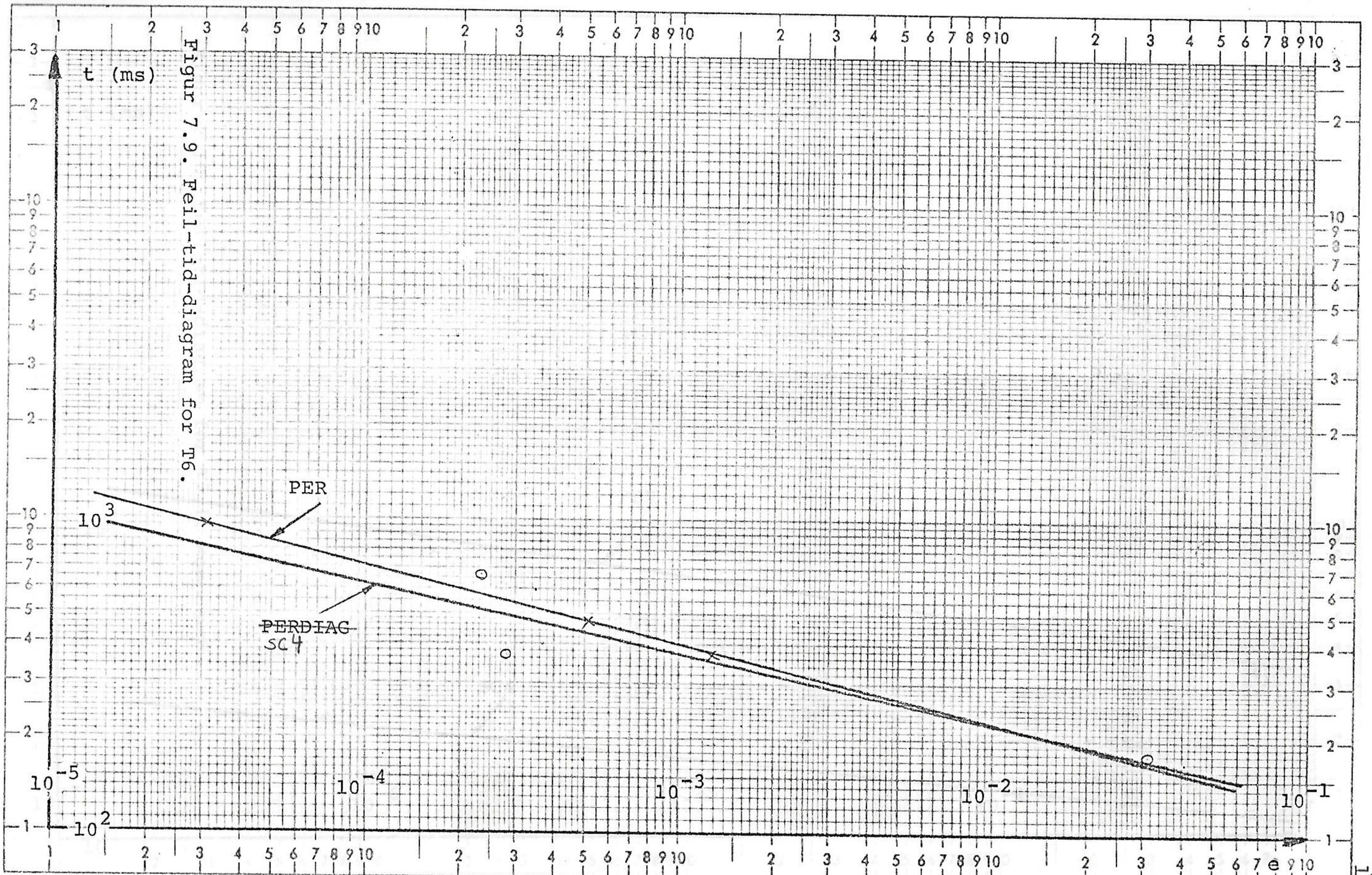
Figur 7.6. Feil-tid-diagram for T3,2. komponent



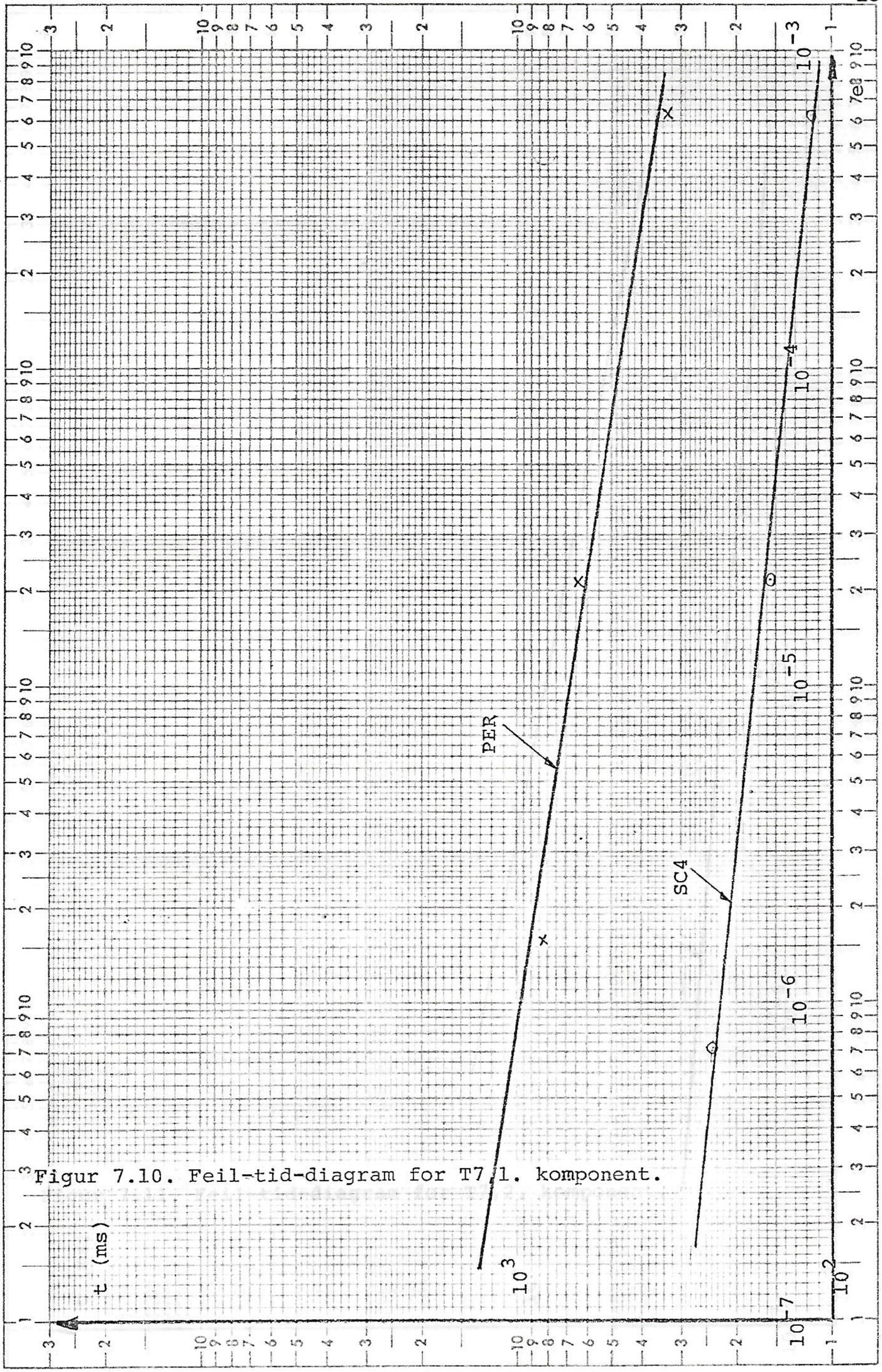
Figur 7.7. Feil-tid-diagram for T4.



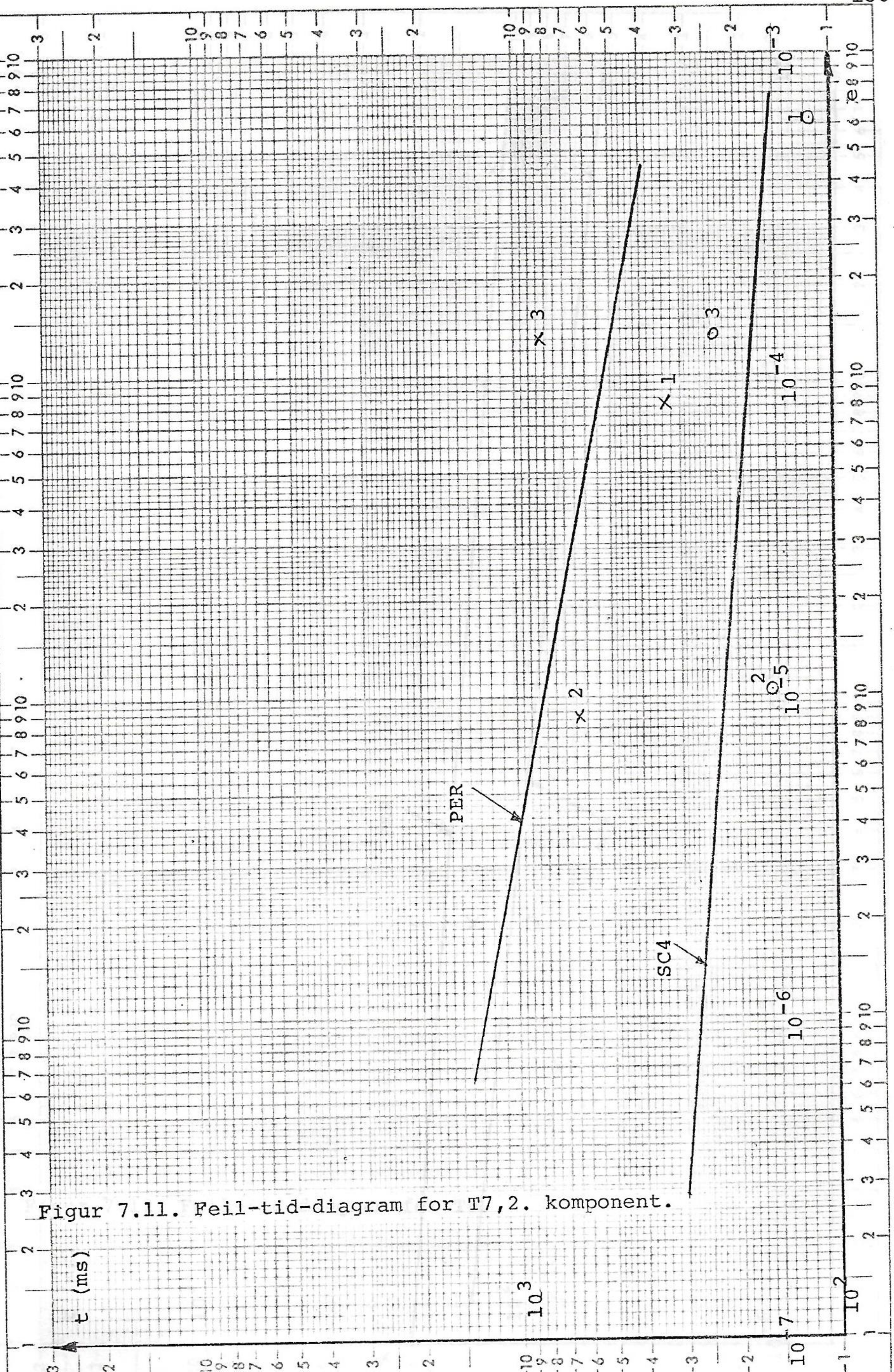
Figur 7.8. Feil-tid-diagram for T5.



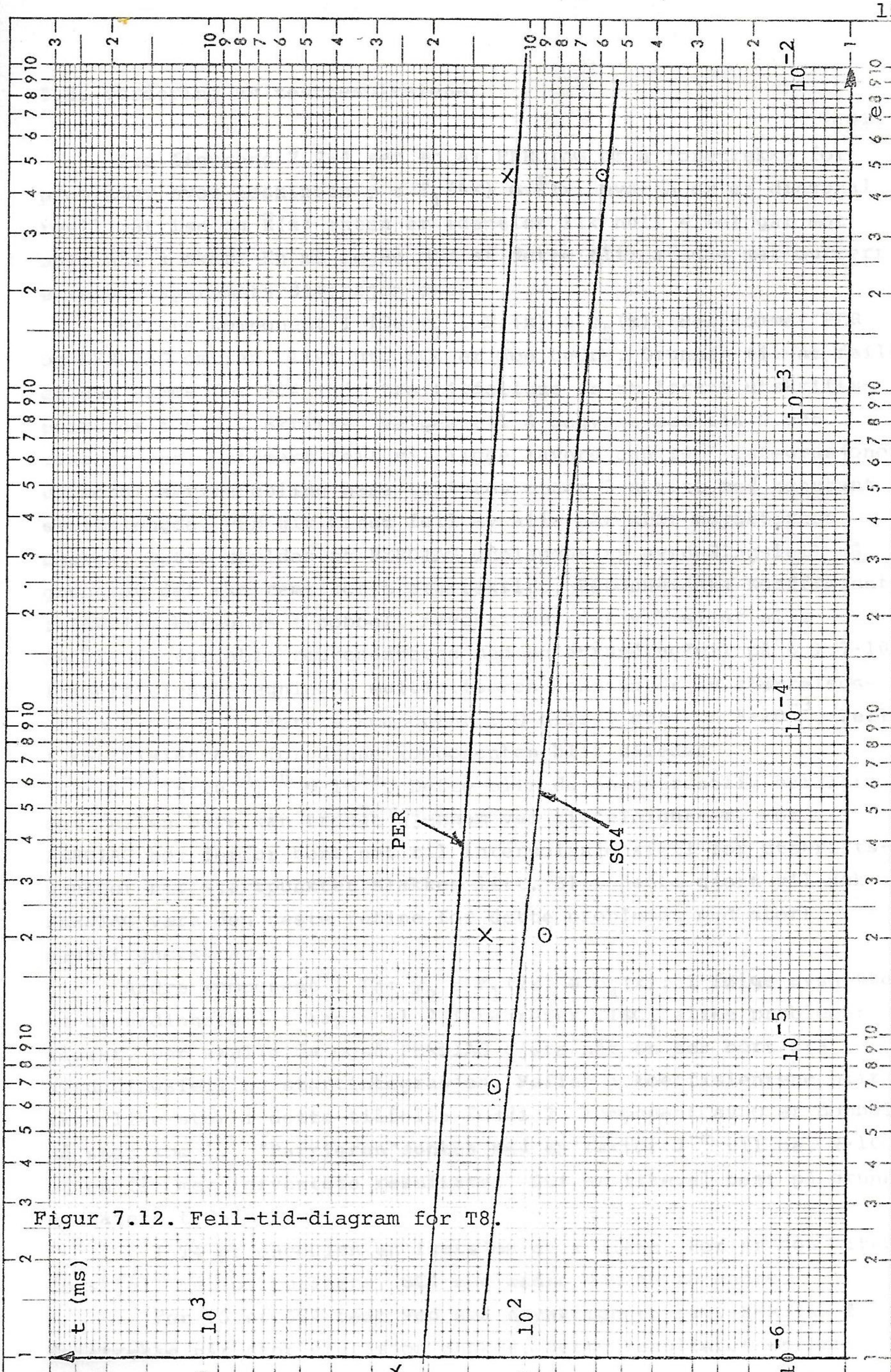
Figur 7.9. Feil-tid-diagram for T6.



Figur 7.10. Feil-tid-diagram for T7.1. komponent.



Figur 7.11. Feil-tid-diagram for T7,2. komponent.



Figur 7.12. Feil-tid-diagram for T8.

7.3. Vurdering av testresultatene.

Fra figurene 7.2-4 ser en at PERDIAG er å foretrekke for problemer hvor løsningen $\vec{y} \in \vec{F}_1(Ax) \oplus \vec{K}(x)$ hvor A er en diagonal reell matrise og $\vec{K}(x)$ enten er identisk lik null eller går mot null når x øker. En må regne med at dette blir stadig mer outrert ettersom systemets dimensjon øker.

Første komponent i T3: $y_1 \in F_1(x) \oplus p_5(x)$. Her kommer PER og PERDIAG omtrent likt ut. SC4 er noe bedre. Grunnen til at feilen er den samme for SC4 i de tre tilfellene er at første utskriftspunkt er i 0.01. Skrittet velges til å begynne med lik 0.005 uansett eps. Estimert feil vil ligge lavere enn 10^{-6} integrasjonen ut fordi skrittdobling bare tillates etter 3 skritt med konstant skrittlengde. PER gir minst feil av alle når stor nøyaktighet ønskes. Dette skyldes at PERDIAG ødelegges av avrundingsfeil på grunn av det ekstremt korte startskritt. Resonnement: Koeffisientene i PERDIAG beregnes i dobbelt nøyaktighet det vil si at alle inngående variable representeres med en avrundingfeil på $\lesssim 1.7\cdot 10^{-18}$. I koeffisientberegningen multipliseres konstanter av størrelsesorden 1 med Q^{-6}. Første komponent i Q blir i starten $5\cdot 10^{-3}$. Feilen i koeffisientene for denne komponenten blir således $1.7\cdot 10^{-18}(5\cdot 10^{-3})^{-6} \approx 10^{-4}$. Dette blir da en omtrentlig barriere som feilen bare kan trenge gjennom ved tilfeldigheter. For PERDIAG bør derfor hensynet til interpolasjonsfeil for utskriftspunkter nær startpunktet slakkes litt. Blir dette gjort vil nok PERDIAG være den beste rutine for dette problemet med stort nøyaktighetskrav.

Andre komponent i T3: $y_2 \in F_1(2x) \oplus p_4(x)$. I følge avsnittet om avrundingsfeil i kapittel 2 integrerer $TTSC_4$ slike problemer eksakt. Det skulle da også PERDIAG gjøre når en ser bort fra avrundingsfeil og startintegrasjon. Feilen i koeffisientene blir ikke like stor i dette tilfelle fordi 2. komponent av Q er dobbelt så stor som 1.. "Barrieren"senkes med en faktor 2^{-6} til ca. $2\cdot 10^{-6}$, og en får mer forventete resultater. SC4 er likevel best på grunn av lavere tidsforbruk.

I T4 er Jacobien en funksjon av x alene. Her er det liten forskjell mellom rutinene, SC4 noe bedre enn de to andre.

For T5 er SC4 best ved små nøyaktighetskrav, PERDIAG å foretrekke når stor presisjon ønskes. Dette resultatet er litt overraskende. PERDIAG bruker en grov tilnærmelse til Jacobimatrisen ved tilpasningen. Ved store skritt skjener den helt ut. Etterhvert som skrittene blir mindre konkurrerer den stadig bedre for å bli den mest effektive rutine til slutt.

T6 skulle en forvente ville favorisere PER foran SC4. Riktignok fås mest nøyaktige resultater med PER, men tilpasningen ser ut til å være så arbeidskrevende at effektiviteten ikke blir større enn for SC4.

I T7 kan en naturligvis ikke vente at PER skal konkurrere med SC4 fordi PER i dette tilfelle reduseres til matematisk sett samme metode som SC4 og består følgelig for en stor del av dummy-operasjoner. Andre komponent av løsningen: $y_2 \varepsilon p_6(x)$ og skal ifølge avsnittet om trunkeringsfeil integreres eksakt uten tilpasning. Dette indikeres av de numeriske løsninger idet minste feil oppnås med eps $\doteq 10^{-4}$.

For T8 som er et ikke-lineært problem (som T5) er SC4 noe mer effektiv enn PER, men gir ikke like nøyaktig løsning ved store nøyaktighetskrav.

8. KONKLUSJON.

Når systemer av typen $\vec{y}'' = \vec{f}(x,\vec{y})$ skal løses ved hjelp av en prediktor-korrektormetode, vil generelt en slik metode basert på trigonometrisk tilpasning av Størmers og Cowells metoder av orden 5 ikke være å foretrekke framfor de tilsvarende metoder uten tilpasning. For en underklasse av problemer med løsning $\vec{y} \in \vec{F}_1(Ax) \oplus \vec{K}(x)$ hvor A er en konstant reell diagonalmatrise og $\vec{K}(x)$ er identisk lik nullvektoren eller en vektorfunksjon som går mot nullvektoren når x øker, synes en trigonometrisk tilpasning å gi en mer effektiv løsningsmetode enn ingen tilpasning.

Det synes videre som om den globale feil kan komme lenger ned mot datamaskinens avrundingsfeil med tilpasning enn uten for en noe større klasse. Da må til gjengjeld et stort tidsforbruk tåles.

For visse koplete systemer kan en diagonal trigonometrisk tilpasning være mest effektivt når stor nøyaktighet kreves. Dette gjelder etter alt å dømme spesielt for problemer med diagonal-dominant Jacobimatrise.

For Størmers metode, $k=0$ blir banestabilt område større med tilpasning enn uten. Banestabiliteten beholdes for alle tilpasninger bortsett fra i visse punkter $q=n\cdot 2\pi$, n naturlig tall. Dette kan tyde på at en trigonometrisk tilpasning av Størmers metode , $k=0$ og de andre banestabile metodene av Størmer-Cowell-type gir større effektivitet ved anvendelse på problemer av typen $\vec{y}'' = -D^2\vec{y}$, hvor D er en reell diagonalmatrise med egenverdier som har stor spredning i størrelsesorden.

9. REFERANSE

|1| Henrici, Peter : Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962.

Vedlegg 1.

De etterfølgende utskrifter viser integrasjon av $y'' = -\lambda^2 y$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, med Størmers metode, k=4 og k=5 og med Cowells metode , k=6. Det er brukt skritt h=1, og $z^2 = \lambda^2 h^2 = \lambda^2$ er variert til å ligge innenfor de ulike områder med absolutt stabilitet eller ustabilitet som framgår av figurene 4.4, 4.6 og 4.9. "Startintegrasjonen" er den kjente eksakte løsning. Det er også tatt med en utskrift av et program som viser hvordan integrasjonen er foretatt for Størmers metode , k=5.

Integrasjon med Størmers metode,k=5.

```
ET*DIP.S5
      PROCEDURE S5(Z2);
      VALUE Z2;
      REAL Z2;
      BEGIN
       REAL UNP1,UN,UNM1,D2UN,D3UN,D4UN,D5UN;
       REAL Z;
       REAL UNG,UNM1G,D2UNG,D3UNG,D4UNG,D5UNG;
       REAL SIN5,SIN4,SIN3,SIN2,SIN1,SIN0;
       INTEGER N;
       COMMENT INITIALISERING;
       Z:=SQRT(Z2);
       SIN0:=0.0;
       SIN1:=SIN(Z);
       SIN2:=SIN(2*Z);
       SIN3:=SIN(3*Z);
       SIN4:=SIN(4*Z);
       SIN5:=SIN(5*Z);
       UN:=SIN4;
       UNM1:=SIN3;
       D2UN:=SIN5-2*SIN4+SIN3;
       D3UN:=SIN5-3*SIN4+3*SIN3-SIN2;
       D4UN:=SIN5-4*SIN4+6*SIN3-4*SIN2+SIN1;
       D5UN:=SIN5-5*SIN4+10*SIN3-10*SIN2+5*SIN1-SIN0;
       WRITE('Z2=',Z2);
       COMMENT INTEGRASJON;
       FOR N:=(6,1,1000) DO
       BEGIN
        UNP1:=2*UN-UNM1-Z2*(UN+1/12*D2UN+1/12*D3UN+19/240*D4UN+3/40*D5UN);
        UNG:=UN;
        UNM1G:=UNM1;
        D2UNG:=D2UN;
        D3UNG:=D3UN;
        D4UNG:=D4UN;
        D4UNG:=D4UN;
        UN:=UNP1;
        UNM1:=UNG;
        D2UN:=UNP1-2*UNG+UNM1G;
        D3UN:=D2UN-D2UNG;
        D4UN:=D3UN-D3UNG;
        D5UN:=D4UN-D4UNG;
        IF N GTR 980 THEN WRITE('N=',N,'   UN=',UN);
       END;
      END PROCEDURE S5;

*PRT 2.H5
```

Størmers metode , k=4 , $z^2 = 1.21$

```
▼XQT DIP.A
BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27 ,1975
N=                  901    UN=       3.2898,-04
N=                  902    UN=       1.2586,-01
N=                  903    UN=       1.2428,-01
N=                  904    UN=      -2.2736,-03
N=                  905    UN=      -1.2599,-01
N=                  906    UN=      -1.2247,-01
N=                  907    UN=       4.1924,-03
N=                  908    UN=       1.2608,-01
N=                  909    UN=       1.2065,-01
N=                  910    UN=      -6.0853,-03
N=                  911    UN=      -1.2615,-01
N=                  912    UN=      -1.1883,-01
N=                  913    UN=       7.9521,-03
N=                  914    UN=       1.2619,-01
N=                  915    UN=       1.1701,-01
N=                  916    UN=      -9.7929,-03
N=                  917    UN=      -1.2620,-01
N=                  918    UN=      -1.1519,-01
N=                  919    UN=       1.1607,-02
N=                  920    UN=       1.2618,-01
N=                  921    UN=       1.1336,-01
N=                  922    UN=      -1.3396,-02
N=                  923    UN=      -1.2613,-01
N=                  924    UN=      -1.1154,-01
N=                  925    UN=       1.5158,-02
N=                  926    UN=       1.2605,-01
N=                  927    UN=       1.0971,-01
N=                  928    UN=      -1.6894,-02
N=                  929    UN=      -1.2595,-01
N=                  930    UN=      -1.0788,-01
N=                  931    UN=       1.8603,-02
N=                  932    UN=       1.2582,-01
N=                  933    UN=       1.0605,-01
N=                  934    UN=      -2.0286,-02
N=                  935    UN=      -1.2567,-01
N=                  936    UN=      -1.0422,-01
N=                  937    UN=       2.1942,-02
N=                  938    UN=       1.2549,-01
N=                  939    UN=       1.0239,-01
N=                  940    UN=      -2.3572,-02
N=                  941    UN=      -1.2528,-01
N=                  942    UN=      -1.0056,-01
N=                  943    UN=       2.5176,-02
N=                  944    UN=       1.2505,-01
N=                  945    UN=       9.8734,-02
N=                  946    UN=      -2.6753,-02
N=                  947    UN=      -1.2479,-01
N=                  948    UN=      -9.6909,-02
N=                  949    UN=       2.8303,-02
N=                  950    UN=       1.2451,-01
N=                  951    UN=       9.5086,-02
N=                  952    UN=      -2.9827,-02
N=                  953    UN=      -1.2420,-01
N=                  954    UN=      -9.3265,-02
N=                  955    UN=       3.1325,-02
N=                  956    UN=       1.2387,-01
N=                  957    UN=       9.1447,-02
N=                  958    UN=      -3.2796,-02
N=                  959    UN=      -1.2352,-01
N=                  960    UN=      -8.9633,-02
```

N=	961	UN=	3.4240,-02
N=	962	UN=	1.2314,-01
N=	963	UN=	8.7821,-02
N=	964	UN=	-3.5658,-02
N=	965	UN=	-1.2274,-01
N=	966	UN=	-8.6014,-02
N=	967	UN=	3.7049,-02
N=	968	UN=	1.2232,-01
N=	969	UN=	8.4211,-02
N=	970	UN=	-3.8414,-02
N=	971	UN=	-1.2187,-01
N=	972	UN=	-8.2413,-02
N=	973	UN=	3.9753,-02
N=	974	UN=	1.2141,-01
N=	975	UN=	8.0619,-02
N=	976	UN=	-4.1065,-02
N=	977	UN=	-1.2092,-01
N=	978	UN=	-7.8831,-02
N=	979	UN=	4.2351,-02
N=	980	UN=	1.2042,-01
N=	981	UN=	7.7049,-02
N=	982	UN=	-4.3611,-02
N=	983	UN=	-1.1989,-01
N=	984	UN=	-7.5272,-02
N=	985	UN=	4.4845,-02
N=	986	UN=	1.1934,-01
N=	987	UN=	7.3502,-02
N=	988	UN=	-4.6052,-02
N=	989	UN=	-1.1877,-01
N=	990	UN=	-7.1739,-02
N=	991	UN=	4.7234,-02
N=	992	UN=	1.1819,-01
N=	993	UN=	6.9982,-02
N=	994	UN=	-4.8389,-02
N=	995	UN=	-1.1758,-01
N=	996	UN=	-6.8232,-02
N=	997	UN=	4.9519,-02
N=	998	UN=	1.1696,-01
N=	999	UN=	6.6490,-02
N=	1000	UN=	-5.0623,-02

EXECUTION TIME 0.211 SECONDS

*FIN

Størmers metode , k=4 , z^2 = 0.64

```
@XQT DIP.AK4
BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27 ,1975
N=          901    UN=      -1.1129,+01
N=          902    UN=      -1.2523,+01
N=          903    UN=      -6.4547,+00
N=          904    UN=       3.4981,+00
N=          905    UN=       1.1421,+01
N=          906    UN=       1.2577,+01
N=          907    UN=       6.2371,+00
N=          908    UN=      -3.8587,+00
N=          909    UN=      -1.1710,+01
N=          910    UN=      -1.2622,+01
N=          911    UN=      -6.0096,+00
N=          912    UN=       4.2246,+00
N=          913    UN=       1.1997,+01
N=          914    UN=       1.2658,+01
N=          915    UN=       5.7722,+00
N=          916    UN=      -4.5956,+00
N=          917    UN=      -1.2281,+01
N=          918    UN=      -1.2685,+01
N=          919    UN=      -5.5249,+00
N=          920    UN=       4.9715,+00
N=          921    UN=       1.2562,+01
N=          922    UN=       1.2703,+01
N=          923    UN=       5.2675,+00
N=          924    UN=      -5.3522,+00
N=          925    UN=      -1.2840,+01
N=          926    UN=      -1.2711,+01
N=          927    UN=      -5.0002,+00
N=          928    UN=       5.7374,+00
N=          929    UN=       1.3114,+01
N=          930    UN=       1.2710,+01
N=          931    UN=       4.7228,+00
N=          932    UN=      -6.1270,+00
N=          933    UN=      -1.3384,+01
N=          934    UN=      -1.2699,+01
N=          935    UN=      -4.4354,+00
N=          936    UN=       6.5207,+00
N=          937    UN=       1.3650,+01
N=          938    UN=       1.2677,+01
N=          939    UN=       4.1379,+00
N=          940    UN=      -6.9184,+00
N=          941    UN=      -1.3911,+01
N=          942    UN=      -1.2646,+01
N=          943    UN=      -3.8303,+00
N=          944    UN=       7.3198,+00
N=          945    UN=       1.4167,+01
N=          946    UN=       1.2603,+01
N=          947    UN=       3.5127,+00
N=          948    UN=      -7.7247,+00
N=          949    UN=      -1.4418,+01
N=          950    UN=      -1.2550,+01
N=          951    UN=      -3.1851,+00
N=          952    UN=       8.1329,+00
N=          953    UN=       1.4664,+01
N=          954    UN=       1.2486,+01
N=          955    UN=       2.8475,+00
N=          956    UN=      -8.5441,+00
N=          957    UN=      -1.4904,+01
N=          958    UN=      -1.2410,+01
N=          959    UN=      -2.4999,+00
N=          960    UN=       8.9580,+00
```

```
N=          961   UN=     1.5138,+01
N=          962   UN=     1.2323,+01
N=          963   UN=     2.1424,+00
N=          964   UN=    -9.3745,+00
N=          965   UN=    -1.5365,+01
N=          966   UN=    -1.2225,+01
N=          967   UN=    -1.7750,+00
N=          968   UN=     9.7932,+00
N=          969   UN=     1.5586,+01
N=          970   UN=     1.2115,+01
N=          971   UN=     1.3978,+00
N=          972   UN=    -1.0214,+01
N=          973   UN=    -1.5799,+01
N=          974   UN=    -1.1992,+01
N=          975   UN=    -1.0108,+00
N=          976   UN=     1.0636,+01
N=          977   UN=     1.6005,+01
N=          978   UN=     1.1858,+01
            979   UN=     6.1419,-01
N=          980   UN=    -1.1060,+01
N=          981   UN=    -1.6203,+01
N=          982   UN=    -1.1711,+01
N=          983   UN=    -2.0799,-01
N=          984   UN=     1.1485,+01
N=          985   UN=     1.6394,+01
N=          986   UN=     1.1552,+01
N=          987   UN=    -2.0770,-01
N=          988   UN=    -1.1910,+01
N=          989   UN=    -1.6575,+01
N=          990   UN=    -1.1380,+01
N=          991   UN=     6.3276,-01
N=          992   UN=     1.2336,+01
N=          993   UN=     1.6748,+01
N=          994   UN=     1.1195,+01
N=          995   UN=    -1.0671,+00
N=          996   UN=    -1.2763,+01
N=          997   UN=    -1.6912,+01
            998   UN=    -1.0997,+01
N=          999   UN=     1.5105,+00
N=         1000   UN=     1.3189,+01

EXECUTION TIME      0.222 SECONDS

∇FIN
```

Størmers metode , k=5

```
@XQT 2.A
BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27 ,1975
Z2=          1.0000,-05
N=                  981     UN=        4.3962,-02
N=                  982     UN=        4.0802,-02
N=                  983     UN=        3.7642,-02
N=                  984     UN=        3.4482,-02
N=                  985     UN=        3.1322,-02
N=                  986     UN=        2.8161,-02
N=                  987     UN=        2.5000,-02
N=                  988     UN=        2.1838,-02
N=                  989     UN=        1.8677,-02
N=                  990     UN=        1.5515,-02
N=                  991     UN=        1.2353,-02
N=                  992     UN=        9.1907,-03
N=                  993     UN=        6.0285,-03
N=                  994     UN=        2.8662,-03
N=                  995     UN=       -2.9604,-04
N=                  996     UN=       -3.4583,-03
N=                  997     UN=       -6.6205,-03
N=                  998     UN=       -9.7827,-03
N=                  999     UN=       -1.2945,-02
N=                 1000     UN=       -1.6107,-02
Z2=          1.0000,-03
N=                  981     UN=       -4.1300,-01
N=                  982     UN=       -3.8399,-01
N=                  983     UN=       -3.5461,-01
N=                  984     UN=       -3.2487,-01
N=                  985     UN=       -2.9480,-01
N=                  986     UN=       -2.6444,-01
N=                  987     UN=       -2.3382,-01
N=                  988     UN=       -2.0296,-01
N=                  989     UN=       -1.7190,-01
N=                  990     UN=       -1.4067,-01
N=                  991     UN=       -1.0929,-01
N=                  992     UN=       -7.7810,-02
N=                  993     UN=       -4.6249,-02
N=                  994     UN=       -1.4642,-02
N=                  995     UN=        1.6980,-02
N=                  996     UN=        4.8584,-02
N=                  997     UN=        8.0140,-02
N=                  998     UN=        1.1162,-01
N=                  999     UN=        1.4298,-01
N=                 1000     UN=        1.7420,-01
Z2=          1.0000,-01
N=                  981     UN=        8.9966,-01
N=                  982     UN=        7.1469,-01
N=                  983     UN=        4.5883,-01
N=                  984     UN=        1.5747,-01
N=                  985     UN=       -1.5951,-01
N=                  986     UN=       -4.6068,-01
N=                  987     UN=       -7.1616,-01
N=                  988     UN=       -9.0062,-01
N=                  989     UN=       -9.9577,-01
N=                  990     UN=       -9.9215,-01
N=                  991     UN=       -8.9015,-01
N=                  992     UN=       -6.9986,-01
N=                  993     UN=       -4.4015,-01
N=                  994     UN=       -1.3680,-01
N=                  995     UN=        1.8013,-01
N=                  996     UN=        4.7920,-01
N=                  997     UN=        7.3075,-01
```

N=	998	UN=	9.0983,-01
N=	999	UN=	9.9867,-01
N=	1000	UN=	9.8848,-01
Z2=	1.5000,-01		
N=	981	UN=	5.3863,-01
N=	982	UN=	1.6620,-01
N=	983	UN=	-2.3088,-01
N=	984	UN=	-5.9378,-01
N=	985	UN=	-8.6873,-01
N=	986	UN=	-1.0150,+00
N=	987	UN=	-1.0109,+00
N=	988	UN=	-8.5696,-01
N=	989	UN=	-5.7608,-01
N=	990	UN=	-2.0984,-01
N=	991	UN=	1.8752,-01
N=	992	UN=	5.5713,-01
N=	993	UN=	8.4421,-01
N=	994	UN=	1.0062,+00
N=	995	UN=	1.0192,+00
N=	996	UN=	8.8111,-01
N=	997	UN=	6.1249,-01
N=	998	UN=	2.5311,-01
N=	999	UN=	-1.4380,-01
N=	1000	UN=	-5.1943,-01
Z2=	5.0000,-01		
N=	981	UN=	1.4390,+01
N=	982	UN=	5.3849,+00
N=	983	UN=	-6.2641,+00
N=	984	UN=	-1.4966,+01
N=	985	UN=	-1.6515,+01
N=	986	UN=	-1.0125,+01
N=	987	UN=	1.1762,+00
N=	988	UN=	1.1977,+01
N=	989	UN=	1.7075,+01
N=	990	UN=	1.3985,+01
N=	991	UN=	4.1461,+00
N=	992	UN=	-7.7458,+00
N=	993	UN=	-1.5979,+01
N=	994	UN=	-1.6569,+01
N=	995	UN=	-9.1877,+00
N=	996	UN=	2.6584,+00
N=	997	UN=	1.3294,+01
N=	998	UN=	1.7593,+01
N=	999	UN=	1.3449,+01
N=	1000	UN=	2.8083,+00
Z2=	7.0000,-01		
N=	981	UN=	5.1160,+03
N=	982	UN=	3.8393,+03
N=	983	UN=	-7.3459,+00
N=	984	UN=	-3.9174,+03
N=	985	UN=	-5.2977,+03
N=	986	UN=	-3.1875,+03
N=	987	UN=	1.0750,+03
N=	988	UN=	4.6999,+03
N=	989	UN=	5.2708,+03
N=	990	UN=	2.3547,+03
N=	991	UN=	-2.1754,+03
N=	992	UN=	-5.3426,+03
N=	993	UN=	-5.0212,+03
N=	994	UN=	-1.3626,+03
N=	995	UN=	3.2650,+03
N=	996	UN=	5.8084,+03

```
N=        997   UN=    4.5431,+03
N=        998   UN=    2.4112,+02
N=        999   UN=   -4.2972,+03
N=       1000   UN=   -6.0649,+03
Z2=  7.1000,-01
N=        981   UN=    5.5205,+03
N=        982   UN=    7.5429,+03
N=        983   UN=    4.5345,+03
N=        984   UN=   -1.5820,+03
N=        985   UN=   -6.7447,+03
N=        986   UN=   -7.4716,+03
N=        987   UN=   -3.1848,+03
N=        988   UN=    3.3195,+03
N=        989   UN=    7.7158,+03
N=        990   UN=    7.0023,+03
N=        991   UN=    1.5708,+03
N=        992   UN=   -5.0210,+03
N=        993   UN=   -8.3555,+03
N=        994   UN=   -6.1373,+03
N=        995   UN=    2.5218,+02
N=        996   UN=    6.5870,+03
N=        997   UN=    8.6138,+03
N=        998   UN=    4.8829,+03
N=        999   UN=   -2.1967,+03
N=       1000   UN=   -7.9342,+03
Z2=  4.0000,+00
IFOF  010602

6: NUMBER TOO LARGE
```

Cowells metode , k=6 , $z^2 = 0.49$

```
    T DIP.A
BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27 ,1975
N=               951    UN=        3.1535,-01
N=               952    UN=        8.7528,-01
N=               953    UN=        1.0237,+00
N=               954    UN=        6.9069,-01
N=               955    UN=        3.2911,-02
N=               956    UN=       -6.4039,-01
N=               957    UN=       -1.0126,+00
N=               958    UN=       -9.0868,-01
N=               959    UN=       -3.7746,-01
N=               960    UN=        3.3129,-01
N=               961    UN=        8.8431,-01
N=               962    UN=        1.0215,+00
N=               963    UN=        6.7841,-01
N=               964    UN=        1.6249,-02
N=               965    UN=       -6.5359,-01
N=               966    UN=       -1.0161,+00
                 967    UN=       -9.0089,-01
N=               968    UN=       -3.6200,-01
N=               969    UN=        3.4715,-01
N=               970    UN=        8.9311,-01
N=               971    UN=        1.0191,+00
N=               972    UN=        6.6594,-01
N=               973    UN=       -4.2742,-04
N=               974    UN=       -6.6664,-01
N=               975    UN=       -1.0194,+00
N=               976    UN=       -8.9286,-01
N=               977    UN=       -3.4644,-01
N=               978    UN=        3.6293,-01
N=               979    UN=        9.0169,-01
N=               980    UN=        1.0165,+00
N=               981    UN=        6.5330,-01
N=               982    UN=       -1.7114,-02
N=               983    UN=       -6.7952,-01
N=               984    UN=       -1.0224,+00
N=               985    UN=       -8.8460,-01
                 986    UN=       -3.3078,-01
N=               987    UN=        3.7862,-01
N=               988    UN=        9.1003,-01
N=               989    UN=        1.0136,+00
N=               990    UN=        6.4047,-01
N=               991    UN=       -3.3807,-02
N=               992    UN=       -6.9223,-01
N=               993    UN=       -1.0252,+00
N=               994    UN=       -8.7610,-01
N=               995    UN=       -3.1502,-01
N=               996    UN=        3.9423,-01
N=               997    UN=        9.1815,-01
N=               998    UN=        1.0104,+00
N=               999    UN=        6.2747,-01
N=              1000    UN=       -5.0501,-02

EXECUTION TIME      0.199 SECONDS
```

Cowells metode , k=6 , $z^2 = 2.56$

```
    T DIP.A1
BEGIN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27 ,1975
N=                 951    UN=        5.5609,-14
N=                 952    UN=        3.0489,-14
N=                 953    UN=       -5.2213,-14
N=                 954    UN=       -2.8494,-14
N=                 955    UN=        4.9024,-14
N=                 956    UN=        2.6629,-14
N=                 957    UN=       -4.6030,-14
N=                 958    UN=       -2.4886,-14
N=                 959    UN=        4.3218,-14
N=                 960    UN=        2.3256,-14
N=                 961    UN=       -4.0578,-14
N=                 962    UN=       -2.1733,-14
N=                 963    UN=        3.8098,-14
N=                 964    UN=        2.0309,-14
N=                 965    UN=       -3.5770,-14
N=                 966    UN=       -1.8978,-14
                   967    UN=        3.3585,-14
N=                 968    UN=        1.7734,-14
N=                 969    UN=       -3.1532,-14
N=                 970    UN=       -1.6572,-14
N=                 971    UN=        2.9605,-14
N=                 972    UN=        1.5485,-14
N=                 973    UN=       -2.7796,-14
N=                 974    UN=       -1.4469,-14
N=                 975    UN=        2.6097,-14
N=                 976    UN=        1.3520,-14
N=                 977    UN=       -2.4501,-14
N=                 978    UN=       -1.2633,-14
N=                 979    UN=        2.3003,-14
N=                 980    UN=        1.1803,-14
N=                 981    UN=       -2.1597,-14
N=                 982    UN=       -1.1028,-14
N=                 983    UN=        2.0276,-14
N=                 984    UN=        1.0304,-14
N=                 985    UN=       -1.9036,-14
                   986    UN=       -9.6271,-15
N=                 987    UN=        1.7872,-14
N=                 988    UN=        8.9945,-15
N=                 989    UN=       -1.6779,-14
N=                 990    UN=       -8.4033,-15
N=                 991    UN=        1.5753,-14
N=                 992    UN=        7.8508,-15
N=                 993    UN=       -1.4789,-14
N=                 994    UN=       -7.3345,-15
N=                 995    UN=        1.3885,-14
N=                 996    UN=        6.8520,-15
N=                 997    UN=       -1.3035,-14
N=                 998    UN=       -6.4011,-15
N=                 999    UN=        1.2238,-14
N=                1000    UN=        5.9798,-15


EXECUTION TIME       0.202 SECONDS
```

Cowells metode , k=6 , z^2 = 3.6864

```
T DIP.A3
IN EXECUTION. NU ALGOL LIBRARY LEVEL 7.0, JANUARY 27 ,1975
        951   UN=        7.3347,+07
        952   UN=       -7.4934,+07
        953   UN=        7.6556,+07
        954   UN=       -7.8212,+07
        955   UN=        7.9905,+07
        956   UN=       -8.1633,+07
        957   UN=        8.3400,+07
        958   UN=       -8.5204,+07
        959   UN=        8.7048,+07
        960   UN=       -8.8931,+07
        961   UN=        9.0855,+07
        962   UN=       -9.2821,+07
        963   UN=        9.4830,+07
        964   UN=       -9.6882,+07
        965   UN=        9.8978,+07
        966   UN=       -1.0112,+08
        967   UN=        1.0331,+08
        968   UN=       -1.0554,+08
        969   UN=        1.0783,+08
        970   UN=       -1.1016,+08
        971   UN=        1.1254,+08
        972   UN=       -1.1498,+08
        973   UN=        1.1747,+08
        974   UN=       -1.2001,+08
        975   UN=        1.2260,+08
        976   UN=       -1.2526,+08
        977   UN=        1.2797,+08
        978   UN=       -1.3074,+08
        979   UN=        1.3356,+08
        980   UN=       -1.3645,+08
        981   UN=        1.3941,+08
        982   UN=       -1.4242,+08
        983   UN=        1.4550,+08
        984   UN=       -1.4865,+08
        985   UN=        1.5187,+08
        986   UN=       -1.5516,+08
        987   UN=        1.5851,+08
        988   UN=       -1.6194,+08
        989   UN=        1.6545,+08
        990   UN=       -1.6903,+08
        991   UN=        1.7268,+08
        992   UN=       -1.7642,+08
        993   UN=        1.8024,+08
        994   UN=       -1.8414,+08
        995   UN=        1.8812,+08
        996   UN=       -1.9219,+08
        997   UN=        1.9635,+08
        998   UN=       -2.0060,+08
        999   UN=        2.0494,+08
       1000   UN=       -2.0937,+08

EXECUTION TIME      0.213 SECONDS

FIN
```